

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

S 133 (Ov 3)

Overzicht van toetsings- en schattingsmethoden met betrek-  
king tot Poisson-verdelingen

door

J. van Klinken

en

H.J. Prins

1954

## Inleiding.

De statistische literatuur over de Poisson-verdeling en verwante onderwerpen is over een groot aantal artikelen verspreid. Systematische studies zijn op dit gebied niet verschenen. De korte beschouwingen in de handboeken over statistiek zijn verre van volledig. Dit maakte het wenselijk de belangrijkste onderwerpen uit deze stof samen te vatten in de vorm van een overzicht, waarbij een literatuurlijst is gevoegd ten behoeve van diegenen, die meer over het behandelde willen weten. Naar deze literatuurlijst wordt in de tekst verwezen door nummers tussen teksthaken.

Enkele belangrijke wiskundige bewijzen worden in extenso gegeven, van andere wordt alleen het verloop geschetst of aangegeven waar het bewijs te vinden is. Elementaire begrippen uit de wiskundige statistiek worden bekend verondersteld. Voor zover nodig zijn ter verduidelijking in een appendix formuleringen van in de tekst voorkomende begrippen gegeven. Naar deze appendix wordt verwezen door nummers tussen ronde haken.

### 0.1. Het Poisson-model.

De wiskundige statistiek is de theorie van de toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening in de praktijk. Alle wiskundige formules en theorieën, die gebruikt worden in de statistiek, krijgen zo in ieder geval van toepassing ook een praktische betekenis. Er wordt een geïdealiseerd model van de werkelijkheid gemaakt, waarmee gerekend kan worden. De resultaten van deze berekening moeten weer omgezet worden in uitspraken over het beschouwde experiment. Het is zo steeds van belang zich duidelijk bewust te zijn in welke gevallen een bepaald type verdelingsfunctie als model gebruikt kan worden. Voor de Poisson-verdeling zullen wij daarom het wiskundige model op verschillende manieren opbouwen, die elk een bepaald type van toepassing karakteriseren. Aan enige (vaak klassieke) voorbeelden zal de rechtvaardiging van de keuze van het Poisson-model geïllustreerd worden.

We zullen in het volgende stochastische grootheden (1) aangeven door onderstreepte symbolen; dezelfde symbolen, niet onderstreept, gebruiken wij voor door de stochastische grootheden aangenomen waarden.

De variabele  $\underline{x}$  bezit een Poisson-verdeling (2) wanneer

$$P[\underline{x} = x] = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Dit geeft dus de kans aan, dat de stochastische grootheid  $\underline{x}$

de waarde  $x$  aanneemt;  $\mu$  is het gemiddelde, of de verwachting van  $x$  en tevens de variantie (2). De stochastische grootheid  $x$  kan bij deze verdeling alleen de natuurlijke getallen doorlopen. Het is daarom aannemelijk, dat alleen bij experimenten, waarbij aantallen beschouwd worden, het Poisson-model gebruikt kan worden;  $P[x=x]$  geeft dan de kans weer dat een bepaald aantal per tijds-, lengte-, of ruimte-eenheid aangetroffen wordt. Neemt men het gemiddelde van een groot aantal waarnemingen van  $x$ , dan zal dit gemiddelde weinig van  $\mu$  afwijken. Er bestaan andere typen verdelingsfuncties, die deze eigenschappen ook bezitten (deze zullen in hoofdstuk 2 besproken worden).

Wanneer het Poisson-model in de praktijk gebruikt kan worden is aan twee wiskundige afleidingen te zien.

In de eerste plaats is de uitdrukking voor de Poisson-verdeling de limiet van de uitdrukking voor de binomiale verdeling. Men heeft (3)

$$P[x=x] = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \\ np \rightarrow \mu}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

Wanneer dus een binomiale verdeling met kleine kans  $p$  op succes en grote steekproefomvang  $n$  als model gekozen zou worden, kan men dit vervangen door het Poisson-model zonder noemenswaardig verlies aan nauwkeurigheid. Dus wanneer de kans op het aantreffen van een bepaald element maar erg klein is (b.v. 0.01), is de keuze van het Poisson-model te rechtvaardigen. B.v. bij tellingen van bloedlichaampjes, verkeersongelukken e.d.

De Poisson-verdeling is ook op te vatten als limietgeval van enkele andere verdelingsfuncties, die in hoofdstuk 2 besproken zullen worden.

Een tweede wiskundige afleiding voor de uitdrukking van de Poisson-verdeling vindt deze als oplossing van een systeem van differentiaalvergelijkingen. In de statistische literatuur duiden men gevallen die hiermee te karakteriseren zijn aan met de naam Poisson-proces (W.FELLER [1], [2]). De voorwaarden, die leiden tot het opstellen van dit systeem differentiaalvergelijkingen kan men nu gebruiken om de gevallen van toepassing van het Poisson-model te karakteriseren.

Wanneer  $P_n(0,t)$  de kans voorstelt op  $n$  gebeurtenissen in de periode  $(0,t)$ <sup>1)</sup>, dan luiden de voorwaarden:

- 1) Voor het Poisson-proces is het niet essentieel, dat de tijd optreedt (zie vb B4); een lengte, oppervlak of volume kan zonder bezwaar als parameter i.p.v. de tijd optreden.

1. Onafhankelijk van het aantal malen, dat de beschouwde gebeurtenis optreedt in het interval  $(0, t)$ , is de kans, dat de gebeurtenis éénmaal optreedt in het interval  $(t, t+h)$ :  $\lambda h + o(h)^2$ , waarin  $\lambda$  een constante is;

2. de kans, dat de gebeurtenis meer dan één maal optreedt in het interval  $(t, t+h)$  is van kleiner grootte-orde dan  $h$ , dus  $o(h)$ .

Een voorbeeld is het aantal  $\alpha$ -deeltjes uitgezonden door een radioactief praeparaat. Dit verschijnsel blijkt zeer nauwkeurig door de Poisson-verdeling beschreven te kunnen worden, terwijl de theorie der radioactiviteit ook aangeeft, dat de bovenstaande onderstellingen vermeld zijn, waarmee dus langs statistische weg ook een bevestiging van de theorie der radioactieve verschijnselen wordt verkregen.

In [1] en in [24] vindt men de Poisson-verdeling als bijzonder geval van een klasse van discrete verdelingen met bepaalde eigenschappen; dit is een derde wiskundige afleiding voor de Poisson-uitdrukking (de voorbeelden A6 en B6 zijn eigenlijk toepassingen hiervan).

Nu zullen enige voorbeelden besproken worden, waarbij ook beschouwd wordt met welk doel statistische methoden gebruikt worden in het beschreven geval. De bovenstaande typen van toepassing zijn niet altijd scherp te onderscheiden. Toch zullen wij de voorbeelden in twee groepen splitsen, corresponderend met de besproken twee wiskundige gevallen van afleiding.

#### A. De Poisson-verdeling als limiet van de binomiale verdeling.

##### 1. Tellingen van bloedlichaampjes.

Een bloedmonster van een proefpersoon wordt na verdunning onder de microscoop bekeken. Het gezichtsveld is in gelijke vierkantjes verdeeld. In elk van deze vierkantjes wordt het aantal bloedlichaampjes geteld. Deze aantallen zijn nu te beschouwen als trekkingen uit een Poisson-verdeling. Het gemiddelde van deze Poisson-verdeling zou men willen kennen om zo te weten te komen hoeveel bloedlichaampjes voorkomen in het onderzochte bloed.

Dat het Poisson-model hier als limietgeval bruikbaar is, is als volgt in te zien.

Uit de totale hoeveelheid bloed,  $V$ , van de proefpersoon wordt een hoeveelheid  $\Delta V$  in een telvierkantjes aangetroffen. Stel dat de proefpersoon in het totaal  $N$  bloedlichaampjes in zijn

-----  
2) Het symbool  $o(h)$  betekent van kleiner grootte-orde dan  $h$  voor  $h \rightarrow 0$ .



bloed heeft, dan is de kans dat in het monster  $n$  bloedlichaampjes zitten:

$$\binom{N}{n} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^n \left( \frac{V - \Delta V}{V} \right)^{N-n},$$

nl. een binomiale verdeling met in dit geval een zeer kleine kans  $\frac{\Delta V}{V}$  en zeer grote  $N$ , zodat het gebruik van de Poisson-benadering gerechtvaardigd is (zie [1]).

## 2. Tellingen van bacteriën.

Dit is eenzelfde geval als onder punt 1. In een klein monster worden de aantallen bacteriën per oppervlakte-eenheid geteld. Deze aantallen volgen evenals de aantallen uit voorbeeld 1. een Poisson-verdeling.

In deze eerste twee voorbeelden kan het nog voorkomen, dat het Poisson-model niet juist is. De bloedlichaampjes en bacteriën hebben nl. een eigen volume, zodat er ook een maximaal aantal is, dat per volume-eenheid kan voorkomen. Ligt het gemiddelde aantal bloedlichaampjes of bacteriën in de buurt van dit maximale aantal, dan is het Poisson-model niet juist meer, want waarden van het aantal welke niet al te ver boven het gemiddelde liggen zijn dan niet meer mogelijk.

Wordt vermoed dat dit het geval is, dan zal men statistisch kunnen toetsen of het Poisson-model nog bruikbaar is; is dit niet het geval, dan wordt een andere verdeling aangepast als model. Deze toetsingsmethoden zijn beschreven in hoofdstuk 2 van dit rapport.

## 3. Insecticiden.

Van een insectendodend middel wil men bepalen hoe doeltreffend het is, d.w.z. men wil weten hoeveel procent van de insecten de toepassing van het middel nog zal overleven. Bij een bepaald soort insecticide gaat men veelal als volgt te werk.

Een proefveld wordt verdeeld in een aantal gelijke vakken. Op het proefveld heeft een bepaald insect legfels eieren gedeponeerd. Het insectendodend middel wordt over het proefveld verdeeld en de aantallen larven die per vak in leven blijven worden geteld. Als alle vakken ongeveer evenveel eieren bevatten volgt dit aantal een Poisson-verdeling. Immers voor elk vak is het middel hetzelfde en dus de overlevingskans,  $p$ , voor ieder insect dezelfde. Stel dat een zeer groot aantal eieren,  $N$ , per vak voorkomen en dat de kans op overleving van de behandeling zeer klein is (wat bij een goed middel het geval is), dan bezit het aantal overlevende insecten per vak dus bij benadering een Poisson-verdeling.

In de praktijk zal het aantal eieren per vak soms een stuk uiteenlopen. Vaak leggen insecten immers grote aantallen eieren in legsels bij elkaar. In dit geval zullen de aantallen dan ook niet trekkingen zijn uit eenzelfde Poisson-verdeling. Andere verdelingsfuncties kunnen weer een betere aansluiting aan de praktijk geven. Statistische toetsing kan weer uitmaken wanneer het Poisson-model nog bruikbaar is en wanneer het beter is een ander model te kiezen (zie hoofdstuk 2 par. 3).

#### 4. Verkeersongevallen.

Men beschouwt het aantal ongevallen met auto's voor perioden, waarin evenveel,  $n$ , auto's een bepaald kruispunt passeren (b.v. de spitsuren). Men onderstelt, dat voor iedere auto de kans op een ongeluk in deze periode,  $p$ , dezelfde is. Men verwaarloost de mogelijkheid, dat één ongeluk meer tot gevolg kan hebben. Het aantal ongelukken zal dan voor de beschouwde periode een binomiale verdeling met zeer kleine kans,  $p$ , hebben, zodat gebruik van het Poisson-model gerechtvaardigd is.

Beschouwt men overeenkomstige perioden in verschillende maanden, dan kan men weer met de toetsen uit par. 1.1 en par. 1.2 uitmaken of de kans op een ongeluk is gestegen of gedaald.

Voor algemenere gevallen is het model iets ingewikkelder. Men beschouwt nu perioden, waarvoor het aantal auto's dat het kruispunt passeert per tijdseenheid fluctueert over de beschouwde periode. We onderstellen nu stochastisch met een bepaalde waarschijnlijkheidsverdeling en komen niet tot het model van een Poisson-verdeling, maar tot dat van een samengestelde Poisson-verdeling. Hiermee kan op overeenkomstige wijze worden getoetst (zie par. 2.3).

#### 5. Kwaliteitsbeheersing.

Bij massaproductie worden steeds defecte exemplaren naast goede geproduceerd. In de meeste gevallen is het aantal defecten gering, de kans op een defect exemplaar is meestal klein.

Beschouw de productie van een aantal exemplaren  $n$ ; de kans op een aantal defecten  $x$  onder deze  $n$  exemplaren wordt, wanneer geen series defecten achter elkaar tengevolge van storing in het proces voorkomen, weergegeven door de Poisson-verdeling.

Bij een productieproces komt het echter vaak voor, dat de waarnemingen niet onafhankelijk zijn: wanneer één defect exemplaar waargenomen is, dan is de kans, dat er meer zullen volgen vaak groter dan na een deugdelijk exemplaar. Dit is b.v. het geval wanneer machines ontregeld raken of wanneer snelle slijtage van een onder-

deel optreedt. Het Poisson-model is dan voor groepen van op elkaar volgende exemplaren niet meer bruikbaar. In het algemeen zal men dus willen toetsen of aan het Poisson-model nog voldaan wordt. Bovendien kan het zijn, dat men niet weet hoe groot de kans op een defect exemplaar is. Men zal dan uit een aantal waarnemingen van het aantal defecte exemplaren per  $n$  geproduceerde een betrouwbaarheidsinterval (4) of schatting voor deze kans willen bepalen, zodat bekend wordt hoe nauwkeurig het productieproces werkt. In hoofdstuk 3 worden deze schattingsmethoden besproken.

Het geval van massaproductie is ook op te vatten als een Poisson-proces. Onder de voorbeelden van het Poisson-proces zal het nogmaals besproken worden.

## 6. Chromosoom-mutaties.

Onder invloed van Röntgenbestraling treden in de chromosomen in de celkern mutaties op. Wordt een aantal cellen gedurende een zekere tijd met X-stralen bestraald, dan zullen in een aantal cellen  $k$  mutaties zijn opgetreden, in een ander aantal  $l$  enz. Het aantal mutaties per cel is nu bij benadering volgens Poisson verdeeld. Immers de kans op een mutatie,  $p$ , is gering, terwijl het aantal mogelijke mutaties,  $N$ , zeer groot is. Verder moet dan aangenomen worden, dat de mutaties onafhankelijk van elkaar optreden.

In een dergelijk geval zal men b.v. de onafhankelijkheid van de mutaties in een celkern willen onderzoeken, of de invloed van een bepaalde soort X-stralen op de kans op het optreden van een mutatie. In het eerste geval wil men dus onderzoeken of het Poisson-model juist is, dus of het optreden van een mutatie onafhankelijk is van het optreden van een andere. In het tweede geval wil men weten hoe groot de kans op een mutatie is. De methoden uit hoofdstuk 3 kunnen voor het laatste geval gebruikt worden.

Evenals in het 5e voorbeeld kan ook hier het evenement beschouwd worden als een Poisson-proces. Onder de volgende voorbeelden zal het daarom nog eens besproken worden.

## B. Het Poisson-proces.

### 1. Arbeidsongevallen.

De leiding van een fabriek wil weten of het aantal ongevallen van arbeiders gedurende een bepaalde tijdsperiode,  $T$ , in verhouding tot het totaal aantal arbeiders, dat in de fabriek werkzaam is, is toegenomen of afgenomen.

Het wiskundige model wordt verkregen door het aantal ongevallen per arbeider te beschouwen en te onderstellen, dat dit voldoet aan de eisen van het Poisson-proces voor een bepaalde korte periode. Men verdeelt nu de periode  $T$  in dergelijke korte deelperioden:  $T_1, \dots, T_m$ . Voor iedere deelperiode  $T_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) geldt nu, dat het totaal aantal ongelukken weer een Poisson-verdeling bezit, omdat dit aantal de som is van de aantallen ongelukken voor de arbeiders afzonderlijk (6). Is het gemiddelde aantal ongelukken voor iedere arbeider in de periode  $T_i$  hetzelfde:  $\lambda_i$ , dan heeft het totale aantal ongelukken een Poisson-verdeling met parameter  $n_i \lambda_i$  ( $n_i$  is het totale aantal arbeiders in de  $i$ -e periode). Men wil nu dus toetsen of de  $\lambda_i$  voor iedere periode hetzelfde zijn, dus of de parameters van de Poissonverdelingen voor de verschillende deelperioden zich verhouden als de aantallen arbeiders werkzaam in die deelperiode. Het een en ander kan getoetst worden met de toets besproken in par. 1.2.

## 2. Radioactiviteit.

Zoals al opgemerkt werd volgt in bepaalde gevallen van radioactieve uiteenvalling het aantal per tijdseenheid uitgezonden deeltjes nauwkeurig een Poisson-verdeling. In tabel 0.1 is door een voorbeeld aangegeven hoe nauw de aansluiting is;  $k$  is het aantal deeltjes waargenomen per periode,  $N_k$  is het aantal perioden waarin  $k$  deeltjes werden waargenomen.  $N.P\{\underline{k} = k\}$  is de verwachting van  $N_k$  op grond van het Poisson-model, waarbij de parameter van de Poisson-verdeling geschat is door middel van het steekproefgemiddelde. Met een  $\chi^2$ -toets voor aanpassing (5) is getoetst hoe nauwkeurig de overeenstemming tussen praktijk en model is. Deze toets gaf een overschrijdingskans van 17% bij een totaal aantal waarnemingen van 2608. Het geschatte gemiddelde is 3.870.

Tabel 0.1

Frequenties van tellingen bij radio-actieve disintegratie 3).

| $k$         | $N_k$ | $N.P[\underline{k} = k]$ |
|-------------|-------|--------------------------|
| 0           | 57    | 54.4                     |
| 1           | 203   | 210.5                    |
| 2           | 383   | 407.4                    |
| 3           | 525   | 525.5                    |
| 4           | 532   | 508.4                    |
| 5           | 408   | 393.5                    |
| 6           | 273   | 253.8                    |
| 7           | 139   | 140.3                    |
| 8           | 45    | 67.9                     |
| 9           | 27    | 29.2                     |
| $k \geq 10$ | 16    | 17.1                     |
| totaal      | 2603  | 2608.0                   |

3) Overgenomen uit W.FELLER [1].

Dit geval is ook een typisch voorbeeld van een Poisson-proces. Aan de onderstellingen van het Poisson-proces is op grond van theoretische overwegingen voldaan. De onafhankelijkheid wordt gegarandeerd door de theoretische onderstelling, dat de atomen onafhankelijk van elkaar desintegreren. (Bij iedere desintegratie ontstaat een uitgezonden deeltje.)

Voor een bepaald atoom is de voorwaarde

$$P_1(t, t+h) = \lambda' h + O(h),$$

waarin het linkerlid de kans op desintegratie tussen de tijdstippen  $t$  en  $t+h$  voorstelt, indien het deeltje op het tijdstip  $t$  nog intact is, vervuld op grond van quantum-mechanische overwegingen. Voor een praeparaat, dat uit  $N$  intacte atomen bestaat, geldt dus, daar een atoom maar eenmaal kan desintegreren, dat de kans op één desintegratie bij kleine  $h$  voldoet aan:

$$P_1(t, t+h) = N(\lambda' h + O(h)) (1 - \lambda' h - O(h))^{N-1} = \lambda h + O(h),$$

met  $\lambda = N \lambda'$ , zodat ook dan de voorwaarde vervuld is. Verder geldt voor de kans op twee integraties:

$$P_2(t, t+h) = \binom{N}{2} \{ \lambda' h + O(h) \}^2 \{ 1 - \lambda' h - O(h) \}^{N-2} = O(h),$$

zodat ook aan de tweede voorwaarde voldaan is. De waarnemingen, die een goede overeenstemming met de Poisson-verdeling geven, leveren zo dus een bevestiging van de theorie.

De schattingsmethoden voor de parameter van de Poisson-verdeling kunnen gebruikt worden als men van een onbekend praeparaat wil weten wat de sterkte der radio-actieve desintegratie is.

## 2. Kosmische stralen.

In Geiger-Müller-tellers wordt het aantal deeltjes geteld, dat hoofdzakelijk uit de bovenste luchtlagen op de aarde komt. Per tijdsinterval heeft dit aantal een Poisson-verdeling. Immers volgens de theorie ontstaan deze deeltjes uit zwaardere deeltjes en deze uit weer zwaardere door desintegratie of door botsing. Het verschijnsel heeft dus een dergelijke achtergrond als de radioactiviteit. Het ontstaan van een deeltje is meestal onafhankelijk van dat van een ander deeltje. Dat  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_1(t, t+h)}{h} = \lambda'$  is, volgt uit quantum-mechanische beschouwingen over desintegratie en disintegratie bij botsing van deeltjes. Dat de andere eis vervuld is, is niet eenvoudig aan te geven, maar volgt ook uit de theorie.

Men wil vaak constateren of verhoogde activiteit van kosmische stralen optreedt, tengevolge van b.v. zonnevlekkenactiviteit. Men wil dan dus toetsen of de parameter  $\mu$  van de Poisson-verdeling verschillend is voor twee of meer verschillende perioden.

### 3. Verkeersdichtheid in een telefooncentrale.

Om te bepalen hoeveel kabels nodig zijn voor een bepaalde interlocale verbinding of om te bepalen hoeveel apparatuur op een centrale nodig is, onderzoekt men het aantal telefoongesprekken, dat binnenkomt in een bepaalde periode. Dit aantal kan beschouwd worden als een trekking uit een Poisson-verdeling, als de abonné's gesprekken aanvragen op een wijze, die aan bepaalde voorwaarden voldoet. Dat hieraan voldaan is, is niet te bewijzen, maar wel intuïtief aanvaardbaar te maken.

Wanneer elke abonné onafhankelijk van de ander een telefoongesprek aanvraagt, wanneer de kans, dat een bepaalde abonné één gesprek aanvraagt in een bepaalde periode  $p$  is en wanneer de kans dat een abonné in deelperiode van lengte  $\frac{1}{n}$  opbelt  $\frac{p}{n}$  is, dan is de kans dat in de deelperiode  $\frac{1}{n}$  een gesprek wordt aangevraagd

$$(1) \quad P_i\left(\frac{1}{n}\right) = N \frac{p}{n} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{N-1},$$

waarin  $N$  het totaal aantal abonné's is. Verder is nog ondersteld, dat een abonné geen twee gesprekken aanvraagt in de periode van lengte  $\frac{1}{n}$ .

Uit (1) volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_i\left(\frac{1}{n}\right) = N p$$

Bovendien geldt voor de kans op in totaal  $i$  aanvragen in de periode van lengte  $\frac{1}{n}$ :

$$P_i\left(\frac{1}{n}\right) = \binom{N}{i} \left(\frac{p}{n}\right)^i \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{N-i},$$

dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P_i\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{voor } i > 1$$

zodat aan beide voorwaarden van het Poisson-proces voldaan is.

Deze beschrijving van het gedrag van de abonné lijkt redelijk; het impliceert, dat in de beschouwde periode het aantal aanvragen van een bepaalde abonné ook een Poisson-verdeling volgt. Dus het aantal aanvragen op de controle is niet anders dan de som van  $N$  volgens Poisson verdeelde grootheden en derhalve volgens een bekende stelling weer volgens Poisson verdeeld (6). Ook

op deze laatste wijze kan hier het Poisson-model aannemelijk gemaakt worden.

Bij onze beschouwingen is afgezien van spitsuren, omdat in de praktijk alleen die periode beschouwd worden. Bovendien is geen rekening gehouden met de duur van een gesprek.

In de praktijk blijkt het Poisson-model in dit geval heel goed te voldoen, zodat ondanks weinig concrete onderstellingen toch een goed model verkregen is.

#### 4. Sterkte van wollen draden.

In de textielindustrie is het belangrijk het garen zo te spinnen, dat het gedurende de productie zo weinig mogelijk breekt. Iedere breuk levert een vertraging en verlies van materiaal op. Om dit verschijnsel meer in de hand te hebben is gepoogd het statistisch te beschrijven. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het model van het Poisson-proces voor het aantal vezels van de draad, dat begint in een bepaald sequent van gegeven lengte.

De voorwaarden voor het Poisson-proces luiden voor dit geval:

1. Onafhankelijk van het aantal vezels dat begint in het sequent  $(0, l)$ , is de kans dat één vezel begint in het sequent  $(l, l + \delta)$  gegeven door  $2\delta \cdot \sigma(\delta)$ ,

2. terwijl de kans, dat meer dan één vezel begint in het sequent  $(l, l + \delta)$  van  $\sigma(\delta)$  is.

Dat aan deze voorwaarden voldaan is, is intuïtief wel duidelijk. Wanneer  $\delta$  erg klein wordt, zal de kans dat één vezel er begint veel groter zijn, dan de kans, dat er meer dan een begint. Was dit niet het geval, dan zou het mogelijk zijn ook voor heel kleine  $\delta$ , dat een groot aantal vezels in dat kleine sequentje begonnen, wat niet overeenstemt met een intuïtief gevoel voor de homogeniteit van het proces.

Het model blijkt in de praktijk goed te voldoen. Om te komen tot de kans op een breuk, dient men de kans uit te rekenen, dat in een bepaald segment de draad minder dan een bepaald aantal vezels bevat. De berekening van deze kans leidt tot ingewikkelde beschouwingen.

#### 5. Chromosoom-mutaties.

Deze werden al besproken als een bijzonder geval van de Poisson-benadering voor de binomiale verdeling. Het verschijnsel is echter ook als een Poisson-proces op te vatten.

Beschouw nl. de duur van bestraling als variabele en ga daarna of aan de voorwaarden van het Poisson-proces voldaan is. Dat dit het geval is, is aannemelijk, want weer is de kans dat in

een klein interval een mutatie optreedt  $\lambda h + \sigma(h)$  en de kans, dat meer mutaties optreden zeker van kleinere orde. Er is echter een bezwaar. Wordt de periode van bestraling erg lang gemaakt, dan zullen andere verschijnselen op gaan treden dan de mutaties; bovendien is het aantal mogelijke mutaties eindig, zodat een soort afgeknotte Poisson-verdeling een beter model zou zijn. In de praktijk zal dus het Poisson-model in dit laatste geval niet meer bruikbaar zijn. Mogelijk zou voor deze gevallen de binomiale verdeling een goed model zijn.

## 6. Kwaliteitsbeheersing.

Ook in dit geval is het productieproces onder zekere beperkende voorwaarden als een Poisson-proces te beschouwen. Deze beperkingen zijn hierin gelegen, dat het productieproces op vaste aequidistante tijdstippen exemplaren aflevert, die ofwel goed ofwel defect kunnen zijn. In een interval van bepaalde lengte kunnen dus niet meer dan een bepaald aantal defecten geproduceerd worden. Bovendien geldt de voorwaarde

$$P_i(t, t, h) = \lambda h + \sigma(h) ,$$

niet als  $h$  steeds kleiner wordt; dit geldt wel als  $h$  niet kleiner wordt dan de tijdsduur  $t$ , die verloopt tussen de productie van twee exemplaren. Wijzigt men de voorwaarden in die zin, dan blijkt daaruit toch nog de uitdrukking voor de Poisson-verdeling te vinden te zijn, als  $t$  maar klein genoeg is.

7. Er zijn nog vele andere toepassingen van de Poisson-verdeling. Een belangrijke categorie wordt gevormd door de wachttijdproblemen. De tijdstippen van een aankomst worden dan ondersteld een Poisson-verdeling te volgen. Komen in een bepaalde periode meer dan een bepaald aantal individuen aan, dan kunnen deze niet meer verwerkt worden en moeten zij wachten.

Voorbeelden hiervan zijn: wachttijden bij loketten, wachttijden van vliegtuigen voor landing mogelijk is e.d.

## 0.2. De inhoud van dit rapport - notatie.

Dit rapport is verdeeld in 3 hoofdstukken. De eerste twee behandelen toetsingsproblemen, het laatste geeft methoden voor schatting en bepaling van betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter  $\mu$  van een Poisson-verdeling.

De toetsingsmethoden geven toetsen voor de nulhypothese, dat alle waarnemingen uit Poisson-verdelingen komen met een gegeven onderlinge verhouding hunner parameters, met als alternatieven, dat de waarnemingen uit andere Poissonverdelingen komen (hoofdstuk 1) of met als alternatieven, dat de waarnemingen uit



verdelingen van een ander type komen. Beschouwingen over het Poisson-proces en eigenschappen daarvan zijn achterwege gelaten.

Ten behoeve van de demonstratie van de toetsingsmethoden wordt van twee notatieschema's gebruik gemaakt.

a) Gegeven zijn de waarnemingen

$$x_1, \dots, x_n$$

trekkingen uit Poisson-verdelingen met parameters resp.  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . Het steekproefgemiddelde wordt aangegeven met  $\bar{x}$ .

b) Gegeven zijn de waarnemingen

$$x_{11}, \dots, x_{1j}, \dots, x_{1n_1}$$

$$x_{21}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2n_2}$$

$$x_{m1}, \dots, x_{mj}, \dots, x_{mn_m}$$

met het bijbehorende schema der parameters:

$$\mu_{11}, \dots, \mu_{1j}, \dots, \mu_{1n_1}$$

$$\mu_{21}, \dots, \mu_{2j}, \dots, \mu_{2n_2}$$

$$\mu_{m1}, \dots, \mu_{mj}, \dots, \mu_{mn_m}$$

De volgende afkortingen worden gebruikt

$$X_i \quad \text{voor} \quad \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad ,$$

$$X \quad \text{voor} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad ,$$

$$x_{i.} \quad \text{voor} \quad \frac{X_i}{n_i} \quad ,$$

$$x_{..} \quad \text{voor} \quad \frac{X}{n} \quad ,$$

$$M_i \quad \text{voor} \quad \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} \quad ,$$

$$M \quad \text{voor} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} \quad .$$

Het symbool  $(i, j)$  betekent: "voor alle  $i$  en  $j$ ". B.v.

$P[x_{ij} = x_{ij}(i, j)]$  betekent: "de kans dat de stochastische grootheden  $x_{ij}$  juist de waarden  $x_{ij}$  aannemen voor alle  $i = 1, \dots, m$  en alle  $j = 1, \dots, n_i$ ".

## HOOFDSTUK 1

### Het toetsen van hypothesen betreffende de parameters van verschillende Poisson-verdelingen.

#### 1.1. Toetsen met behulp van de dispersie-index.

##### 1.1.1. Inleiding.

Laat bij een of ander experiment het onderstaande schema met waarnemingen worden gebruikt.

$$\begin{array}{ccccccc} x_{11}, & x_{12}, & \dots & x_{1n_1} \\ x_{21}, & x_{22}, & \dots & x_{2n_2} \\ \vdots & & & \\ x_{m1}, & x_{m2}, & \dots & x_{mn_m} \end{array} \quad \text{met } n = \sum_{i=1}^m n_i$$

$x_{ij}$  is bijvoorbeeld het aantal oproepen per uur in een telefooncentrale. Zie ook voorbeeld B4 van de inleiding. Wij onderstellen steeds, dat alle waarnemingen onderling onafhankelijk zijn.

Verder wordt aangenomen dat de waarnemingen  $x_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$ ) afkomstig is uit een Poisson-verdeling met parameter  $\mu_{ij}$ ;

$\mu_{ij}$  is zowel de verwachting,  $E x_{ij}$ , als de variantie,  $Var. x_{ij}$ , van  $x_{ij}$  (2).

Men kan nu verschillende hypothesen betreffende de onderlinge verhouding van de waarden van de parameters  $\mu_{ij}$  opstellen. Vervolgens kan men één zo'n hypothese kiezen om deze te toetsen tegen een bepaalde verzameling van alternatieve hypothesen van soortgelijke aard. Bijvoorbeeld zouden wij de hypothese, dat alle waarnemingen uit éénzelfde Poisson-verdeling komen kunnen toetsen tegen de alternatieve hypothese, dat de waarnemingen uit verschillende Poisson-verdelingen komen.

Een andere hypothese die wij kunnen toetsen is, dat alle waarnemingen van één rij uit eenzelfde Poisson-verdeling komen. Dat wil dus zeggen, dat elke rij een steekproef is uit eenzelfde Poisson-verdeling. Als alternatieve hypothese komen hier in aanmerking: de waarnemingen uit één rij komen uit verschillende Poisson-verdelingen. De verzameling van alternatieve hypothesen is hier dus dezelfde als die uit het voorgaande voorbeeld. Ten slotte kunnen we als alternatieven nemen: de rijen zijn steekproeven uit verschillende Poisson-verdelingen en de hypothese toetsen, dat alle rijen waarnemingen eenzelfde Poisson-verdeling bezitten. In dit laatste geval is de te toetsen hypothese dezelfde als in het eerste voorbeeld, terwijl de klasse van alternatieven een andere is.

Wij beschouwen nu de parameterruimte, die wij met  $M_n$  aangeven. Dit is in ons geval het 1e "2"-ant" (de  $n$ -dimensionale generalisatie van een kwadrant) van de  $n (= \sum n_i)$ -dimensionale ruimte met de  $\mu_{ij}$  als coördinaten, daar  $\mu_{ij} > 0$  is voor alle  $i$  en  $j$ . De bij iedere toetsing beschouwde toegelaten hypothesen (i.e. de te toetsen hypothese — de nulhypothese — en de alternatieve hypothesen) vormen deelruimten van de parameterruimte evenals uiteraard de nulhypothese zelf. De alternatieven uit het eerste voorbeeld omvatten de gehele parameterruimte met uitzondering van de nulhypothese. Deze nulhypothese kunnen we voorstellen door:  $\mu_{ij} = \mu_{i\ell}$  voor alle  $i, j, \ell$  en  $\ell$ . In de parameterruimte  $M_n$  bestaat de nulhypothese dus uit alle punten  $\vec{\mu} (\vec{\mu} = \{\mu_{11}, \dots, \mu_{mn_m}\})$  van de lijn  $\ell$ , die door de oorsprong gaat en gelijke hoeken maakt met de coördinaatassen. Van deze lijn komt verder uiteraard alleen dat deel in aanmerking, dat in het eerste "2"-ant" ligt. De lijn  $\ell$  stelt dus een deelruimte van  $M_n$  voor, die we in het hieronder volgende met  $M_\ell$  zullen aangeven. Bij de hypothesen: elke rij is een steekproef uit een Poisson-verdeling, waarbij deze Poisson-verdelingen onderling verschillend kunnen zijn, hoort ook een deelruimte  $M_k$  van  $M_n$ .  $M_k$  wordt bepaald door de voorwaarden:  $\mu_{ij} = \mu_{i\ell}$  voor iedere  $i, j$  en  $\ell$ . Deze voorwaarden bepalen een  $m$ -dimensionale deelruimte. Opmerking verdient nog, dat de bij de boven besproken deelruimten behorende hypothesen samengestelde hypothesen zijn (i.e. dat de deelruimten van de parameterruimte, die deze hypothesen bepalen meer dan één punt bevatten).

In tabel 1.1 zijn de deelruimten met de bijbehorende hypothesen nog eens schematisch weergegeven.

Tabel 1.1

Verschillende hypothesen, voorgesteld als deelruimten van de parameterruimte  $M_n$ .

|          |                                                                 |                                                                                                                            |
|----------|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M_n$    | $\mu_{ij} > 0$<br>voor alle<br>$i$ en $j$                       | De waarneming $x_{ij}$ komt uit een Poisson-verdeling met parameter $\mu_{ij}$ ;<br>$j = 1, \dots, n_i; i = 1, \dots, m$ . |
| $M_m$    | $\mu_{ij} = \mu_{i\ell}$<br>voor alle<br>$i, j$ en $\ell$       | De rijen waarnemingen zijn steekproeven uit Poisson-verdelingen                                                            |
| $M_\ell$ | $\mu_{ij} = \mu_{i\ell}$<br>voor alle<br>$i, j, \ell$ en $\ell$ | Alle waarnemingen komen uit eenzelfde Poisson-verdeling                                                                    |

De bij de bovenbeschreven toetsen beschouwde hypothesen, zowel de nulhypothese als de alternatieve hypothesen, kunnen door bovenstaande deelruimten volledig worden beschreven. Deze hypothesen zijn van hetzelfde type als die welke in de variantie-analyse worden beschouwd, nl. lineaire hypothesen (7). Er is ook verder een grote analogie tussen de enkelvoudige variantie-analyse en de in deze en de volgende paragraaf te behandelen theorie. Zoals bekend, zijn de toetsen uit de variantie-analyse in wezen  $\lambda$ -toetsen (likelihood-ratio tests (8)). In de volgende paragraaf zal blijken, dat de hier te bespreken toetsen asymptotisch equivalent zijn met  $\lambda$ -toetsen.

### 1.1.2. Afleiding van de toetsingsgrootheden en de asymptotische verdeling.

Wij zullen in deze paragraaf toetsingsgrootheden afleiden voor de reeds beschreven drie toetsen (de nulhypothesen zijn aangegeven met  $H_0$ , de toegelaten hypothesen door  $H$ ; de bij de in tabel 1.1 vermelde deelruimten  $M_n$ ,  $M_k$  en  $M_l$  behorende verzamelingen van hypothesen met resp.  $H_n$ ,  $H_k$  en  $H_l$ ):

$T_{n,1}$      $H_0$ : Alle waarnemingen komen uit eenzelfde Poisson-verdeling ( $H_1$ );  
            $H$ : Alle waarnemingen komen uit Poisson-verdelingen, die echter alle verschillend kunnen zijn ( $H_n$ ).

$T_{n,l}$      $H_0$ :  $H_l$   
            $H$ : De rijen waarnemingen zijn steekproeven uit eventueel verschillende Poisson-verdelingen ( $H_m$ ).

$T_{n,m}$      $H_0$ :  $H_m$   
            $H$ :  $H_n$

Beschouw de toets  $T_{n,1}$ . Onder de nulhypothese,  $H_0$ , komen de waarnemingen uit een Poisson-verdeling met onbekende parameter  $\mu$ . De simultane waarschijnlijkheidsverdeling van de  $x_{ij}$  is dus (zie voor de notatie par. 0.2):

$$(1.1) \quad P[x_{ij} = x_{ij} (i,j) | H_0] = \frac{e^{-n\mu} \mu^X}{\prod_{i,j} x_{ij}!}$$

Ook  $X$  bezit onder  $H_0$  een Poisson-verdeling en wel met parameter  $n\mu$  (6); dus:

$$(1.2) \quad P[X = X | H_0] = \frac{e^{-n\mu} (n\mu)^X}{X!}$$

Wij beschouwen nu de voorwaardelijke simultane waarschijnlijkheidsverdeling van de  $x$  onder de voorwaarde, dat de som  $X$  de in het experiment gevonden waarde  $X$  aanneemt en onder de

hypothese  $H_1$ . Deze voorwaardelijke verdeling wordt, zoals gemakkelijk is in te zien, door het quotiënt van (1.1) en (1.2) gegeven (9). Wij vinden zo:

$$(1.3) \quad P[\underline{x}_{ij} = x_{ij}(i,j) \mid \underline{X} = X; H_1] = \frac{X!}{\prod_{i,j} x_{ij}!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^X$$

In deze uitdrukking voor de voorwaardelijke verdeling komt de parameter  $\mu$  niet meer voor. Verder blijkt het laatste lid van (1.3) juist gelijk te zijn aan de kans, dat bij een multinomiale verdeling met gelijke kansen op  $n$  gebeurtenissen genummerd met de indices paren  $(i,j)$ , de gebeurtenissen  $(i,j)$  bij  $X$  waarnemingen juist  $x_{ij}$  keer optreden. Het is dan echter bekend, dat

$$(1.4^*) \quad \sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - \underline{x}_{..})^2}{\underline{x}_{..}},$$

asymptotisch, voor  $X \rightarrow \infty$ , verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(n-1)$  vrijheidsgraden (10).

Wij merken op, dat  $\underline{x}_{..}$  in deze uitdrukking niet stochastisch is. Immers (1.4<sup>\*</sup>) is, zoals uit de afleiding blijkt, verdeeld als  $\chi^2$ , onder de voorwaarde  $\underline{x}_{..} = \underline{x}_{..}$ . Het is echter eenvoudig te bewijzen, dat de uitdrukking (1.4<sup>\*</sup>), ook wanneer men de voorwaarde  $\underline{x}_{..} = \underline{x}_{..}$  laat vallen, asymptotisch (voor  $\mu \rightarrow \infty$ ) een  $\chi^2$ -verdeling met  $(n-1)$  vrijheidsgraden bezit. Immers, is  $c \geq 0$ , dan geldt, als  $f(\chi^2)$  de verdelingsdichtheid van  $\chi^2$  voorstelt (zie (9)):

$$(1.5) \quad \begin{aligned} P\left[\sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - \underline{x}_{..})^2}{\underline{x}_{..}} \leq c \mid H_1\right] &= \\ &= \sum_{\underline{x}_{..}} P\left[\sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - \underline{x}_{..})^2}{\underline{x}_{..}} \leq c \mid H_1\right] P[\underline{x}_{..} = \underline{x}_{..} \mid H_1] = \\ &\approx \int_0^c f(\chi^2) d\chi^2 \sum_{\underline{x}_{..}} P[\underline{x}_{..} = \underline{x}_{..} \mid H_1] = \\ &= \int_0^c f(\chi^2) d\chi^2, \end{aligned}$$

want de eerste factoren uit de producten van het tweede lid zijn volgens (1.4<sup>\*</sup>) voor elke  $\underline{x}_{..}$  asymptotisch verdeeld als  $\chi^2$  en dus asymptotisch gelijk en onafhankelijk van de  $\underline{x}_{..}$ . Uit (1.5) volgt, dat ook onvoorwaardelijk

$$(1.4) \quad \underline{Z}_{n,1} = \sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - \underline{x}_{..})^2}{\underline{x}_{..}}$$

asymptotisch (voor  $\mu \rightarrow \infty$ ) een  $\chi^2$ -verdeling met  $(n-1)$  vrijheidsgraden bezit.

Met behulp van een vrijwel analoge redenering blijkt, dat voor de toets  $T_{n,m}$ , onder de nulhypothese  $H_m$ , de grootte

$$(1.6) \quad \underline{Z}_{n,m} = \sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - \underline{x}_{i.})^2}{\underline{x}_{i.}},$$

asymptotisch (voor  $\mu_i \rightarrow \infty$  ( $i=1, \dots, m$ )) verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(n-m)$  vrijheidsgraden. Immers vrijwel analoog aan het zojuist gevondene heeft men, dat

$$\sum_j \frac{(\underline{x}_{ij} - \underline{x}_{i.})^2}{\underline{x}_{i.}}$$

asymptotisch (voor  $\mu_i \rightarrow \infty$ ) verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(n_i-1)$  vrijheidsgraden, onder de nulhypothese: "de waarnemingen uit de  $i$  rij komen uit eenzelfde Poisson-verdeling". Deze uitdrukkingen zijn voor verschillende waarden van  $i$  onafhankelijk verdeeld, omdat ieder der grootheden  $\underline{x}_{ij}$  slechts in één ervan voorkomt. Uit de additieve eigenschap voor de  $\chi^2$ -verdeling (11) volgt nu, dat de grootte (1.6) asymptotisch verdeeld is als  $\chi^2$  met  $\sum_i (n_i - 1) = n - m$  vrijheidsgraden.

De afleiding van een toetsingsgrootte voor de toets  $T_{m,1}$  verloopt op een dergelijke wijze.

De simultane waarschijnlijkheidsverdeling van de  $\underline{X}_i$  onder  $H_1$  is

$$(1.7) \quad P[\underline{X}_i = X_i(i) | H_1] = \frac{e^{-n\mu} \prod_i (n_i \mu)^{X_i}}{\prod_i X_i!}.$$

Onder  $H_1$  bezit  $\underline{X}$  een Poisson-verdeling met parameter  $n\mu$  (6), dus

$$(1.8) \quad P[\underline{X} = X | H_1] = \frac{e^{-n\mu} (n\mu)^X}{X!}.$$

Voor de simultane waarschijnlijkheidsverdeling van de  $\underline{X}_i$  onder de voorwaarde  $\underline{X} = X$  en de hypothese  $H_1$ , vinden wij dan weer

$$(1.9) \quad P[\underline{X}_i = X_i(i) | \underline{X} = X; H_1] = \frac{X!}{\prod_i X_i!} \prod_i \left(\frac{n_i}{n}\right)^{X_i}.$$

Het rechterlid van (1.9) is juist gelijk aan de kans, dat bij een multinomiale verdeling met kansen  $\frac{n_i}{n}$ , ( $i=1, \dots, m$ ) op

$m$  gebeurtenissen, genummerd van 1 tot en met  $m$ , bij  $X$  waarnemingen, de  $i^e$  gebeurtenis  $X_i$  keer optreedt ( $i=1, \dots, m$ ). Hieruit volgt, dat onder  $H_1$  geldt (8), dat

$$(1.10) \quad Z_{m,1} = \sum_i \frac{n_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2}{\bar{x}_{..}}$$

asymptotisch (voor  $\mu \rightarrow \infty$ ) verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(m-1)$  vrijheidsgraden. Hierbij werd gebruik gemaakt van eenzelfde redenering als onder (1.5) om over te gaan van de voorwaardelijke verdeling onder voorwaarde  $X = X$  op de onvoorwaardelijke verdeling.

De grootheden (1.4), (1.6) en (1.10) worden dispersie-indices genoemd en worden gebruikt als toetsingsgrootheden voor de toetsen  $T_{n,1}$ ,  $T_{n,m}$ , resp.  $T_{m,1}$ .

In tabel 1.2 zijn de verschillende toetsen met de daarbij beschouwde hypothesen en de toetsingsgrootheden, de dispersie-indices met de asymptotische verdelingen schematisch weergegeven.

Tabel 1.2

Toetsen, waarbij gebruik wordt gemaakt van de dispersie-index.

| toets     | nulhypothese en toegelaten hypothesen                                                                                                                                      | dispersie-index                                                   | asymptotische verdeling |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $T_{n,1}$ | $H_0$ : Alle waarnemingen komen uit eenzelfde Poisson-verdeling ( $H_1$ );<br>$H$ : Alle waarnemingen komen uit eventueel verschillende Poisson-verdelingen ( $H_{n,1}$ ). | $\sum_{i,j} \frac{(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{..})^2}{\bar{x}_{..}}$ | $\chi^2_{(m-1)}$        |
| $T_{m,1}$ | $H_0$ : $H_1$<br>$H$ : De rijen waarnemingen zijn steekproeven uit eventueel verschillende Poisson-verdelingen ( $H_{m,1}$ ).                                              | $\sum_i \frac{n_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2}{\bar{x}_{..}}$ | $\chi^2_{(m-1)}$        |
| $T_{n,m}$ | $H_0$ : $H_m$<br>$H$ : $H_n$                                                                                                                                               | $\sum_{i,j} \frac{(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i.})^2}{\bar{x}_{i.}}$ | $\chi^2_{(m-m)}$        |

In hoeverre het gebruik van de grootheden (1.4), (1.6) en (1.10) als toetsingsgrootheden voor toetsen met de beschouwde alternatieve hypothesen gerechtvaardigd is, zal in par. 1.3 besproken worden. Dat deze methoden voor de gestelde alternatieve

hypotheseën asymptotisch onderscheidend zullen zijn is wel in te zien. Immers in het algemeen zal de som van de kwadraten van de afwijkingen van het steekproefgemiddelde groter zijn, wanneer de waarnemingen niet uit éénzelfde verdeling komen.

Deze toetsingsproblemen zijn beschreven door P.V.SUKHATME [3] en R.A.FISHER [4]. In [25] en [21] worden deze en aanverwante toetsingsmethoden besproken; het onderscheidingsvermogen en de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering worden ook beschouwd; [25] is een van de eerste publicaties over dit onderwerp. In [27] worden drie verwante toetsingsmethoden vergeleken. Een korte beschrijving van de toetsen vindt men in [27] en [28].

## 1.2. Het toetsen met behulp van de dispersie-index. Generalisatie.

Het is mogelijk de hypotheseën  $H_1$  en  $H_m$  algemener te formuleren en toetsingsgrootheden voor de zo gegeneraliseerde toetsen  $T'_{n,1}$ ,  $T'_{m,1}$  en  $T'_{n,m}$  af te leiden, die van eenzelfde gedaante zijn als de dispersie-indices. Deze generalisatie wordt verkregen door, waar in de hypotheseën  $H_1$  en  $H_m$  verondersteld wordt, dat waarnemingen uit eenzelfde Poisson-verdeling komen, dit te vervangen door de onderstelling dat de parameters van deze Poisson-verdelingen niet gelijk zijn, maar een bekende verhouding bezitten.  $H_m$  blijft onveranderd.

De generalisatie van de hypothese  $H_1$  wordt zo:

$H'_1$ : Alle waarnemingen komen uit Poissonverdelingen met bekende onderlinge verhoudingen der parameters  $\mu_{ij}$  (d.w.z. als  $v_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{M}$ , dan zijn de  $v_{ij}$  gegeven onder  $H'_1$ ).

In de parameter ruimte  $M_n$  stelt  $H'_1$  weer een lijn,  $\ell'$ , door de oorsprong voor, die nu echter geen gelijke hoeken met de coördinaatassen behoeft te maken.

Hieronder zal de afleiding van de toetsingsgrootheid voor de met  $T'_{n,1}$  corresponderende toets  $T'_{n,1}$  gegeven worden. Voor de met  $T'_{m,1}$  en  $T'_{n,m}$  corresponderende toetsen  $T'_{m,1}$  en  $T'_{n,m}$  zal alleen het resultaat vermeld worden, daar de afleiding geen nieuwe gezichtspunten geeft.

De toets  $T'_{n,1}$  toetst de nulhypothese  $H'_1$  met als toegelaten hypotheseën  $H_n$ .

Beschouw weer de waarnemingen  $x_{ij}$ ; deze zijn onder  $H'_1$  afkomstig uit Poisson verdelingen met bekende onderlinge verhoudingen,  $v_{ij}$ , der parameters  $\mu_{ij}$ . De simultane waarschijnlijkheidsverdeling der  $x_{ij}$  is nu



$$P[\underline{x}_{ij} = x_{ij} (i,j) | H'_1] = \frac{e^{-M} \prod_{i,j} \mu_{ij}^{x_{ij}}}{\prod_{i,j} x_{ij} !}$$

De som der  $\underline{x}_{ij}$ ,  $\underline{X}$  bezit een Poisson-verdeling met parameter  $M$  onder de hypothese  $H'_1$  :

$$P[\underline{X} = X | H'_1] = \frac{e^{-M} M^X}{X !}$$

Wij vormen weer de voorwaardelijke verdeling der  $\underline{x}_{ij}$  onder de voorwaarde  $\underline{X} = X$  en onder de hypothese  $H'_1$  :

$$(1.3') \quad P[\underline{x}_{ij} = x_{ij} (i,j) | \underline{X} = X; H'_1] = \frac{X !}{\prod_{i,j} x_{ij} !} \prod_{i,j} v_{ij}^{x_{ij}}$$

Dit is weer een multinomiale verdeling, zodat (10)

$$(1.4') \quad \underline{Z}'_{n,1} = \sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - v_{ij} X)^2}{v_{ij} X}$$

onder de voorwaarde  $\underline{X} = X$  asymptotisch (voor  $X \rightarrow \infty$ ) verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(n-1)$  vrijheidsgraden. Met behulp van een analoge redenering als (1.5) volgt, dat ook onvoorwaardelijk (1.4') een  $\chi^2$ -verdeling met  $(n-1)$  vrijheidsgraden bezit. (1.4') gaat over in (1.4), wanneer alle  $\mu_{ij}$  gelijk zijn (onder  $H_1$ ); de  $v_{ij}$  zijn dan alle gelijk aan  $\frac{1}{n}$ .

Analoge uitbreidingen zijn te geven aan de toetsen  $T_{m,1}$  en  $T_{n,m}$ . De gegeneraliseerde hypothese  $H'_m$  luidt:

$H'_m$ : Alle waarnemingen uit de  $i$ -rij ( $i=1, \dots, m$ ) komen uit Poisson-verdelingen met bekende onderlinge verhoudingen der  $\mu_{ij}$  (d.w.z., als  $u_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{M_i}$ , dan zijn de  $u_{ij}$  gegeven onder  $H'_m$ ).

Voor de toets  $T_{m,1}$  moet de hypothese  $H'_1$  iets anders geformuleerd worden, omdat de onderlinge verhoudingen der  $\mu_{ij}$  in iedere rij onder de toegelaten hypothesen  $H'_m$  al vastgelegd zijn. De getoetste hypothese is in dit geval:

$H''_1$ : Alle waarnemingen komen uit Poisson-verdelingen met bekende onderlinge verhoudingen der  $\mu_{ij}$  (d.w.z., als

$v_{ij} = v_i u_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{M_i}$ , dan zijn behalve de  $u_{ij}$  ook de  $v_i$  en dus de  $v_{ij}$  gegeven).

De toets  $T'_{m,1}$  toetst nu bovenstaande hypothese  $H''_1$  met als toegelaten hypothesen  $H'_m$ . De toetsingsgrootheid

$$(1.10') \quad \underline{z}'_{m,1} = \sum_i \frac{(n_i \underline{x}_i - n v_i \underline{x}_{..})^2}{n v_i \underline{x}_{..}}$$

is asymptotisch verdeeld als  $\chi^2$  met  $(m-1)$  vrijheidsgraden;  $\underline{z}'_{m,1}$  gaat weer over in  $\underline{z}_{m,1}$  als  $v_i = \frac{n_i}{n}$ , wat juist tot de toets  $T_{m,1}$  leidt. Men heeft nl. slechts dan  $v_i = \frac{n_i}{n}$  als alle  $u_{ij} = \frac{1}{n_i}$  en dus de  $v_{ij} = \frac{1}{n}$  zijn.

De toets  $T'_{n,m}$  toetst  $H'_m$  met als toegelaten hypothesen  $H_n$ . De toetsingsgrootheid

$$(1.6') \quad \underline{z}'_{n,m} = \sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - u_{ij} n_i \underline{x}_{i.})^2}{u_{ij} n_i \underline{x}_{i.}}$$

is asymptotisch verdeeld als  $\chi^2$  met  $(n-m)$  vrijheidsgraden en gaat voor  $u_{ij} = \frac{1}{n_i}$  in  $\underline{z}_{n,m}$  over. Bij deze laatste toets, toetst men eigenlijk herhaalde malen met (1.4'), d.w.z. de toets  $T'_{n,1}$  wordt als het ware op elk der rijen toegepast, maar men let er daarbij niet op of voor elke rij afzonderlijk de nulhypothese verworpen kan worden, maar wel of dit voor alle rijen tezamen kan. Zo is het mogelijk, dat bij toetsing volgens (1.4') onder de  $m$  toetsingen enige malen verworpen moet worden worden, terwijl (1.6') niet tot verwerping leidt. Mutatis mutandis geldt dit ook voor de toets  $T'_{n,m}$ . Tabel 1.3 geeft een overzicht van de zojuist besproken generalisaties.

Tabel 1.3

Gegeneraliseerde toetsen, waarbij gebruik wordt gemaakt van dispersie-indices.

| toets      | nulhypothese en toegelaten hypothesen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | toetsingsgrootheid                                                                                             | asymptotische verdeling |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $T'_{n,1}$ | <p><math>H_0</math>: Alle waarnemingen komen uit Poisson-verdelingen met bekende onderlinge verhoudingen der parameters <math>\mu_{ij}</math>, gegeven door de <math>v_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{M}</math> (<math>H'_1</math>)</p> <p><math>H</math>: Alle waarnemingen komen uit Poisson-verdelingen met willekeurige verhoudingen der parameters. (<math>H_n</math>).</p> | $\underline{z}'_{n,1} = \sum_{i,j} \frac{(\underline{x}_{ij} - v_{ij} \underline{X})^2}{v_{ij} \underline{X}}$ | $\chi^2_{n-1}$          |

Tabel 1.3 (vervolg)

| toets      | nulhypothese en toegelaten hypothesen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | toetsingsgrootheid                                                                   | asymptotische verdeling |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $T'_{m,i}$ | $H_0$ : Alle waarnemingen komen uit Poisson-verdelingen met bekende onderlinge verhoudingen der parameters $\mu_{ij}$ , gegeven door de $v_i$ :<br>$v_{ij} = v_i u_{ij}$ . De $u_{ij}$ zijn al gegeven onder $H_0$ ( $H'_i$ ).<br>$H$ : Alle waarnemingen uit de $i^*$ rij ( $i = 1, \dots, m$ ) komen uit Poisson-verdelingen met bekende onderlinge verhoudingen der $\mu_{ij}$ gegeven door $u_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{M_i}$ ( $H'_m$ ). | $z'_{m,i} = \sum_i \frac{(n_i \bar{x}_i - v_i \bar{X})^2}{v_i \bar{X}}$              | $\chi^2_{m-1}$          |
| $T'_{n,m}$ | $H_0$ : $H'_m$ (zie onder $T'_{m,i}$ ).<br>$H$ : $H'_n$ (zie onder $T'_{n,i}$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $z'_{n,m} = \sum_{i,j} \frac{(\bar{x}_{ij} - u_{ij} \bar{X}_i)^2}{u_{ij} \bar{X}_i}$ | $\chi^2_{n-m}$          |

Ter illustratie van de toepassing van deze gegeneraliseerde toets geven wij een voorbeeld (zie ook voorbeeld B1 uit de inleiding).

De bedrijfsleiding van een fabriek wil onderzoeken of het aantal ongelukken van arbeiders over een lange periode,  $L$ , constant is gebleven, afgezien van toevallige fluctuaties. Onder  $H_0$  wordt ondersteld, dat het aantal ongevallen per arbeider voor perioden van iedere lengte een Poisson-verdeling bezit met parameter  $\lambda$  en dat alle arbeiders even "vatbaar" zijn voor ongelukken (zie voorbeeld 4, par. 2.1 en [39]), d.w.z. dat het gemiddelde aantal ongelukken voor iedere arbeider hetzelfde is. (De complicatie, dat bij één ongeluk meerdere arbeiders betrokken kunnen zijn, laten wij, ter wille van de eenvoud van het voorbeeld, buiten beschouwing.)

Wanneer het totaal aantal arbeiders  $n$ , gedurende de periode  $L$  niet veranderd is, kan men deze periode in  $m$  gelijke delen verdelen:  $L_1, \dots, L_m$  en voor ieder van die deelperioden het aantal bij ongelukken betrokken arbeiders  $x_1, \dots, x_m$  waarnemen. De grootheden  $\bar{x}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) hebben, zoals opgemerkt, een Poisson-verdeling. Het gemiddelde is  $k n \lambda$ ;  $k$  is hierin de lengte van de perioden  $L_i$ ,  $n$  is het aantal arbeiders. Met de toetsings-

grootheid  $\underline{z}_{n_i}$ , kan men nu toetsen of de deelperioden alle het zelfde gemiddelde hebben of, wat op hetzelfde neerkomt, de kans  $p$  voor alle deelperioden dezelfde was.

In het algemeen zal, wanneer de periode  $L$  lang genoeg is, het aantal arbeiders niet constant zijn. In één deelperiode werken meer arbeiders in de fabriek dan in een andere. Stellen we het aantal arbeiders in de periode  $L_i$  door  $n_i$  voor, dan is  $\underline{z}_i$  dus verdeeld met gemiddelde  $\frac{n_i}{\sum n_i} p$ . Wil men nu toetsen of de  $p$ 's voor alle deelperioden dezelfde zijn, dan moet men dus toetsen of de gemiddelden van de Poisson-verdelingen van de opeenvolgende deelperioden zich verhouden als  $n_1 : n_2 : \dots : n_m$ . Men toetst nu dus met  $\underline{z}'_{n_i}$ , waarbij de  $v_i$  de verhoudingen  $n_i / \sum n_i$  zijn.

De methode van indeling in  $m$ , eventueel ook ongelijke, deelperioden, wordt bepaald door het effect dat men verwacht te vinden. Verwacht men b.v. dat het aantal ongelukken periodiek is, met periode  $\ell$ , dan zal men, wanneer men de lengte der deelperioden  $= \ell$  neemt, niets vinden; neemt men echter de lengte der deelperioden  $\approx \frac{1}{2} \ell$ , dan is te verwachten, dat deze periodieke afwijking wel aan het licht komt. Voor ieder geval apart dient dus met zorg de indeling in deelperioden bepaald te worden om een juiste interpretatie van de uitkomsten mogelijk te maken.

Opmerking: Wanneer in een geval van benadering van de binomiale door de Poisson-verdeling de kans  $p$  zo groot geoordeeld wordt dat de Poisson-benadering niet goed zal zijn, kan met een eenvoudige generalisatie van de bekende binomiale dispersie-index toets getoetst worden (12), nl. met:

$$\underline{d} = \sum_{i=1}^m \frac{\left( \underline{z}_i - \frac{n_i}{\sum n_i} \underline{X} \right)^2}{\frac{n_i}{\sum n_i} \underline{X} \left( 1 - \frac{\underline{X}}{\sum n_i} \right)} ;$$

$\underline{d}$  is weer verdeeld als  $\chi^2$  met  $m-1$  vrijheidsgraden en is dezelfde toetsingsgrootheid als gebruikt wordt voor toetsing in een  $2 \times k$ -tabel met ongelijke kolomtotalen;  $\underline{d}$  is niet zo eenvoudig te berekenen als  $\underline{z}'_{n_i}$ , maar steeds is  $\underline{z}'_{n_i} < \underline{d}$ . Aangezien beide onder  $H_0$  bij benadering dezelfde verdeling hebben, zal  $\underline{d}$  bij het gebruik van deze  $\chi^2$ -verdeling als benadering vaker tot verwerping van  $H_0$  leiden dan  $\underline{z}'_{n_i}$ . Daar weinig bekend is over de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering in beide gevallen (zie par. 1.5), valt voor kleine  $p$ , mede wegens de eenvoud der berekening, het gebruik van  $\underline{z}'_{n_i}$  boven dat van  $\underline{d}$  te prefereren.

### 1.3. Asymptotische aequivalentie van de voorgaande toetsingsmethoden en de overeenkomstige $\lambda$ -toetsingsmethoden.

In de vorige paragraaf werden voor de toetsen  $T_{n_1}'$ ,  $T_{n_2}'$  en  $T_{n_m}'$  dispersie-indices als toetsingsgrootheden gekozen. Hierbij bleek, dat deze dispersie-indices asymptotisch een  $\chi^2$ -verdeling bezitten. Over de eigenschappen (onderscheidingsvermogen, zuiverheid e.d.) werd in het voorgaande niets gezegd. In het hieronder volgende zal echter blijken, dat deze toetsen asymptotisch aequivalent zijn met  $\lambda$ -toetsen, die volgens de toetsingstheorie van J.NEYMAN en E.S.PEARSON (zie ook A.WALD [32]) asymptotisch zekere optimale eigenschappen bezitten (8).

Het een en ander zal alleen uitgewerkt worden voor de generaliseerde toets  $T_{n_1}'$ . De afleiding is voor de andere toetsen analoog.

Een ander bewijs voor deze asymptotische aequivalentie wordt gegeven in [5] door KOLODZIEJCZYK.

Beschouw de waarnemingen  $x_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n_i$ ) uit de vorige paragraaf. Onder de hypothese  $H_1'$  is de simultane verdeling der  $x_{ij}$ :

$$\begin{aligned} P[\underline{x}_{ij} = x_{ij}(i,j) | H_1'] &= \prod_{i,j} \frac{e^{-v_{ij}\mu} (v_{ij}\mu)^{x_{ij}}}{x_{ij}!} = \\ (1.11) \quad &= e^{-\mu \sum x_{ij}} \prod_{i,j} \frac{(v_{ij})^{x_{ij}}}{x_{ij}!} \end{aligned}$$

Onder de toegelaten hypothesen  $H_m$  is de simultane verdeling der  $x_{ij}$ :

$$(1.12) \quad P[\underline{x}_{ij} = x_{ij}(i,j) | H_m] = \prod_{i,j} \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{x_{ij}}}{x_{ij}!}$$

Om tot een  $\lambda$ -toets te komen, moet men nu (1.11) maximaliseren als functie van  $\mu$  en (1.12) als functie der  $\mu_{ij}$ . Men moet dus de meest aannemelijke schattingen (13)  $m$  voor  $\mu$  en  $m_{ij}$  voor  $\mu_{ij}$  bepalen en substitueren in (1.11) en (1.12). Deze worden, zoals gemakkelijk na te rekenen is

$$\begin{aligned} (1.13) \quad m &= \sum x_{ij} \quad \text{en} \\ m_{ij} &= x_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n_i) \end{aligned}$$

De  $\lambda$ -toetsingsgrootheid wordt nu gevormd door het quotiënt van (1.11) en (1.12) na substitutie van de aannemelijkste schattingen (1.13). Men vindt zo:

$$(1.14) \quad \underline{\lambda}_0 = \prod_{i,j} \left( v_{ij} \frac{X}{x_{ij}} \right)^{x_{ij}}$$

In [29], blz. 211 en 259, wordt aangegeven, dat onder zekere algemene voorwaarden  $-2 \log \underline{\lambda}$  asymptotisch verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(n-1)$  vrijheidsgraden. In het bovenstaande geval is aan deze voorwaarden voldaan, zodat  $-2 \log \underline{\lambda}_0$  verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(n-1)$  vrijheidsgraden.

Om deze  $\lambda$ -toets te vergelijken met de dispersie-index-toets, zullen wij eerst een  $\lambda$ -toets afleiden voor dezelfde hypothesen, maar onder de voorwaarde  $\underline{X} = X$ . In par. 1.2 vonden wij reeds de voorwaardelijke simultane verdeling der  $x_{ij}$  onder de hypothese  $H_1'$  en de voorwaarde  $\underline{X} = X$  in formule (1.3'). De  $v_{ij}$  zijn in (1.3') bekende grootheden en er treden geen andere parameters op, zodat deze uitdrukking niet meer gemaximaliseerd behoeft te worden. De simultane verdeling der  $x_{ij}$  onder de hypothese  $H_n$  en de genoemde voorwaarde is

$$P[x_{ij} = x_{ij}(i,j) | \underline{X} = X; H_n] = \frac{X!}{\prod_{i,j} x_{ij}!} \prod_{i,j} v_{ij}^{x_{ij}}$$

waarin de  $v_{ij}$  nu onbekend zijn.

Deze uitdrukking is maximaal voor

$$\hat{v}_{ij} = \frac{x_{ij}}{X}$$

en wij vinden voor de voorwaardelijke  $\lambda$ -toetsingsgrootheid:

$$(1.15) \quad \underline{\lambda}_v = \prod_{i,j} \left( v_{ij} \frac{X}{x_{ij}} \right)^{x_{ij}}$$

$-2 \log \underline{\lambda}_v$  is weer asymptotisch verdeeld als  $\chi^2$  met  $(n-1)$  vrijheidsgraden, zodat ook onvoorwaardelijk hetzelfde geldt volgens (1.5). De uitdrukkingen (1.14) en (1.15) blijken dus tot dezelfde toets te leiden, zodat nog slechts aangetoond behoeft te worden, dat  $\underline{\lambda}_v$  asymptotisch gelijk is aan de dispersie-index  $\underline{\lambda}'_{n,1}$ .

Nu kunnen wij, met weglating der onderstrepingen,  $\lambda_v$  als volgt schrijven:

$$\lambda_v = \frac{X^X \prod_{ij} x_{ij}!}{X! \prod_{ij} x_{ij}^{x_{ij}}} \frac{X!}{\prod_{ij} x_{ij}!} \prod_{ij} v_{ij}^{x_{ij}} =$$

(1.16)

$$= K \frac{X!}{\prod_{ij} x_{ij}!} \prod_{ij} v_{ij}^{x_{ij}}$$

$\lambda_v$  is dus op de factor K na gelijk aan de kans op de waargenomen aantallen  $x_{ij}$  bij X waarnemingen van een multinomiale verdeling met kansen  $v_{ij}$ . Voor deze multinomiale verdeling kunnen wij nu de meerdimensionale normale benadering gebruiken (zie ook [29] blz 270-273); wij krijgen dan (vgl. (1.4')):

$$(1.17) \quad \lambda_v = K \left( \frac{X}{2\pi} \right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{1}{\prod_{ij} v_{ij}}} e^{-\frac{1}{2} z'_{n,1}} \left( \frac{1}{X} \right)^n$$

Schrijft men nu met behulp van de formule van STIRLING K in machten, dan volgt

$$(1.18) \quad \lambda_v = \prod_{ij} \left( \frac{x_{ij}}{X} \frac{1}{v_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} z'_{n,1}}$$

Nu geldt, onder de te toetsen hypothese, voor grote X:

$$(1.19) \quad P \left[ \left| \frac{x_{ij}}{X} - v_{ij} \right| < \delta \mid X=X; H_1' \right] > 1-\varepsilon$$

waarbij  $\varepsilon$  ( $>0$ ) van te voren gekozen wordt, terwijl X zo groot gekozen kan worden, dat (1.19) geldt, d.w.z.  $\frac{x_{ij}}{X}$  convergeert in waarschijnlijkheid naar  $v_{ij}$ . Hieruit volgt dus, dat  $\lambda_v$  in waarschijnlijkheid naar  $e^{-\frac{1}{2} z'_{n,1}}$  convergeert.

En asymptotisch geldt

$$(1.20) \quad -2 \log \lambda_v = z'_{n,1},$$

terwijl beiden asymptotisch verdeeld zijn als  $\chi^2$  met  $(n-1)$  vrijheidsgraden.

Hiermee is de asymptotische aequivalentie aangetoond van de dispersie-index-toets en de  $\lambda$ -toets.

Om verschillende redenen zal men bij voorkeur de dispersie-index in plaats van de  $\lambda$ -toets gebruiken voor het toetsen van de beschouwde hypothesen:

1. Het is mogelijk met behulp van de voorwaardelijke verdeling, b.v. (1.3), voor kleine  $\sum x_{ij}$  en  $n$  een exacte toetsingsmethode op te stellen (zie par. 1.4). Dit maakt het tevens mogelijk de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering te onderzoeken voor kleine waarden van  $n$  en  $X$  (zie par. 1.5).

2. De berekening van  $\lambda$ , de toetsingsgrootte bij toepassing van de  $\lambda$ -toets, is veel bewerkelijker dan die van de dispersie-index voor hetzelfde geval.

#### 1.4. Exacte toetsen voor zeer kleine waarden van $\mu$ .

Voor zeer kleine waarden van  $\mu$  zijn de toetsingsmethoden van de vorige paragrafen minder goed bruikbaar. De  $\chi^2$ -benaderingen voor de verdelingen van de verschillende toetsingsgrootten zijn dan in de regel niet voldoende nauwkeurig (zie par. 1.5). Het is echter mogelijk voor deze gevallen exacte toetsen aan te geven. Deze methoden berusten op de formules (1.3), (1.3') en (1.3'') van de vorige paragrafen. Beperken wij ons eerst tot (1.3). (1.3) laat zien, dat de voorwaardelijke simultane verdeling van de  $x_{ij}$  onder de hypothese  $H_1$ , dat de waarnemingen  $x_{ij}$  uit eenzelfde Poisson-verdeling komen en de voorwaarde, dat de som  $X$  de waarde  $X$  aanneemt, die bij het experiment is gevonden, een multinomiale verdeling met gelijke kansen is. Deze exacte voorwaardelijke verdeling is dus onafhankelijk van  $\mu$  en volledig bekend. Beschouwen wij nu de steekproefruimte. Deze steekproefruimte is in ons geval de roosterpuntenverzameling, die verkregen wordt door in de  $n$ -dimensionale Euclidische ruimte uitsluitend gehele niet-negatieve waarden voor de coördinaten toe te laten. Toetsing onder de voorwaarde  $X = X$  betekent nu, dat in de roosterpuntverzameling van elk vlak  $X = k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) een kritiek gebied gekozen moet worden. Uit de voorgaande paragraaf bleek, dat grote waarden van  $\sum_{i,j} \frac{(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2}{\bar{x}_{..}}$  als kritieke

punten beschouwd kunnen worden. De voorwaardelijke kritieke gebieden zullen wij nu zo kiezen, dat zij de punten bevatten met de grootste waarde voor  $\sum_{i,j} \frac{(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2}{\bar{x}_{..}}$  of, wat in dit geval op het-

zelfde neerkomt, met de grootste waarde voor  $\sum_{i,j} x_{ij}^2$ . Worden de mogelijke uitkomsten, die alle  $X = X$  hebben, opgeschreven in volgorde van dalende waarden van  $S = \sum_{i,j} x_{ij}^2$  en is de van te vo-



ren gekozen onbetrouwbaarheid gelijk aan  $\alpha$ , dan wordt de voorwaardelijke kritieke zone (met als voorwaarde  $\underline{X} = X$ ) gevormd door de punten in deze volgorde bijeen te garen totdat de onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha$  nog juist niet overschreden wordt. Voor elke  $X$  ( $X = 0, 1, 2, \dots$ ) wordt zo een voorwaardelijk kritiek gebied gevormd met onbetrouwbaarheid  $\leq \alpha$  en zo dicht mogelijk bij  $\alpha$ . Het kritieke gebied heeft dus het karakter van een "similar region" (14) (zie ook [31]). Al deze voorwaardelijke kritieke gebieden tezamen vormen dus een onvoorwaardelijk kritiek gebied met onbetrouwbaarheid  $\leq \alpha$  wat ook de waarde van de onbekende parameter  $\mu$  zij.

Immers geven wij de voorwaardelijke kritieke gebieden in de vlakken  $\underline{X} = X$  aan met  $\mathcal{Z}_X$ , het onvoorwaardelijke kritieke gebied met  $\mathcal{Z}$  en het stochastische punt  $\{\underline{x}_{ij}\}$  met  $\underline{P}$ , de onbetrouwbaarheid van de onvoorwaardelijke toets met  $\alpha'$  en die van de voorwaardelijke kritieke zones met  $\alpha'_X$  ( $X = 0, 1, 2, \dots$ ), dan geldt:

$$\begin{aligned}\alpha' &= P[\underline{P} \in \mathcal{Z} | H_1] = \sum_X P[\underline{P} \in \mathcal{Z}_X | H_1] P[\underline{X} = X | H_1] = \\ &= \sum_X \alpha'_X \frac{e^{-n\mu} (n\mu)^X}{X!}\end{aligned}$$

en dit is  $\leq \alpha$ , als  $\alpha'_k \leq \alpha$  voor iedere  $k$ .

Ter verduidelijking van het bovenstaande zetten wij de exacte toetsingsprocedure nog eens aan een eenvoudig concreet voorbeeld uiteen. Veronderstel, dat er 6 waarnemingen zijn en dat de som der waarnemingen 8 is; dus  $n=6$  en  $X=8$ . Wij schrijven nu alle splitsingen van het getal 8 in 6 getallen  $x_1, \dots, x_6$  op, waarbij echter alleen die splitsingen genoteerd worden, waarvoor geldt

$$(1.21) \quad x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_6$$

Wij krijgen dan tabel 1.4; de gevolgde systematiek is duidelijk.

Tabel 1.4

Voorbeeld van de exacte toets voor  $H_1$ .

| splitsing<br>no. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                | 8     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 2                | 7     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 3                | 6     | 2     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 4                | 6     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 5                | 5     | 3     | 0     | 0     | 0     | 0     |

Tabel 1.4 (vervolg)

| splitsing<br>no. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 6                | 5     | 2     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 7                | 5     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| 8                | 4     | 4     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 9                | 4     | 3     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 10               | 4     | 2     | 2     | 0     | 0     | 0     |
| 11               | 4     | 2     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| 12               | 4     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     |
| 13               | 3     | 3     | 2     | 0     | 0     | 0     |
| 14               | 3     | 3     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| 15               | 3     | 2     | 2     | 1     | 0     | 0     |
| 16               | 3     | 2     | 1     | 1     | 1     | 0     |
| 17               | 3     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 18               | 2     | 2     | 2     | 2     | 0     | 0     |
| 19               | 2     | 2     | 2     | 1     | 1     | 0     |
| 20               | 2     | 2     | 1     | 1     | 1     | 1     |

Elke splitsing, d.w.z. elke regel bevat een aantal groepen van gelijke getallen. Noem de aantallen gelijke getallen in elk van de regels:  $k_1, \dots, k_i$ . In de eerste regel, b.v., is  $k_1 = 1$  en  $k_2 = 5$ , in de tweede  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 4$ . Iedere regel vertegenwoordigt, indien wij de voorwaarde (1.21) opheffen, een aantal splitsingen met dezelfde waarde van  $x_i$  als in deze regel aangegeven staan, maar nu in alle mogelijke volgorden. Het aantal splitsingen behorend bij één regel is:

$$(1.22) \quad K = \frac{n!}{k_1! \dots k_i!}$$

Nu wordt bij elk van de splitsingen uit tabel 1.4 de daarbij behorende kans  $\mathcal{P}$  uit (1.3) berekend en vermenigvuldigd met de met die regel corresponderende  $K$ . Voor iedere regel wordt op die wijze een getal verkregen, dat, onder  $H_i$  en onder de voorwaarde  $\underline{X} = X$  de kans voorstelt op één der door die regel vertegenwoordigde splitsingen. De zo verkregen kansen worden vervolgens in een rij geplaatst naar afdalende waarden van

$$S = \sum_i x_i^2 ; \text{ dit is uitgevoerd in tabel 1.5.}$$

Tabel 1.5  
Voorbeeld van de exacte toets voor  $H_1$  (vervolg).

| splitsing<br>no. | S  | K   | $10^5 \cdot P$ | $10^5 \cdot K \cdot P$ |
|------------------|----|-----|----------------|------------------------|
| 1                | 64 | 6   | 0              | 0                      |
| 2                | 50 | 30  | 0              | 1                      |
| 3                | 40 | 30  | 2              | 51                     |
| 4                | 38 | 60  | 3              | 198                    |
| 5                | 34 | 30  | 3              | 99                     |
| 8                | 32 | 15  | 4              | 62                     |
| 6                | 30 | 120 | 10             | 1200                   |
| 7                | 28 | 60  | 20             | 1200                   |
| 9                | 26 | 120 | 17             | 2004                   |
| 10               | 24 | 60  | 25             | 1501                   |
| 13               | 22 | 60  | 33             | 1998                   |
| 11               | 22 | 180 | 50             | 9004                   |
| 14               | 20 | 90  | 67             | 6003                   |
| 12               | 20 | 30  | 100            | 3001                   |
| 15               | 18 | 180 | 100            | 18007                  |
| 18               | 16 | 15  | 150            | 2251                   |
| 16               | 16 | 120 | 200            | 24010                  |
| 19               | 14 | 60  | 300            | 18007                  |
| 17               | 14 | 6   | 400            | 2401                   |
| 20               | 12 | 15  | 600            | 9005                   |

Er dient nog opgemerkt te worden, dat bij verschillende splitsingen gelijke waarden van  $S$  kunnen behoren; in dat geval is gerangschikt naar opklimmende waarden van  $P$ . Een kritieke zone met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  wordt nu gevormd door de splitsingen in de volgorde van tabel 1.5 bij elkaar te nemen tot  $\alpha$  nog juist niet overschreven wordt. Als voorbeeld nemen wij  $\alpha = 0,05$ . Wij sommeren nu de kansen in de laatste kolom van tabel 1.5 tot en met de kans, waarbij de gevormde som nog juist niet groter dan 0,05 is; in ons geval behoort de laatste kans, die nog gesommeerd wordt, bij de splitsing met nummer 9. De splitsingen boven de stippellijn en de splitsingen die hieruit ontstaan door indices-verwisseling vormen nu de kritieke zone. De juiste onbetrouwbaarheid is iets kleiner dan 0,05 en wel 0,048. De kritieke zone bestaat dus in de eerste plaats uit grote waarden van  $S$ , terwijl van twee regels met gelijke  $S$  het eerst de regel met de kleinste  $P$  bij de kritieke zone genomen wordt.

Vergelijken wij deze exacte toets met de dispersie-index-toets, dan blijkt voor splitsing 9  $\chi^2_{.5} = 11,5$  te zijn; hierbij hoort een overschrijdingskans 0,042. Dus een kleinere overschrijdingskans met de  $\chi^2$ -toets dan met de exacte toets voor een even groot kritiek gebied. Het verschil tussen beide methoden blijkt in dit geval echter gering, terwijl de schatting voor  $\mu$  vrij klein is ( $x_{.} = 1,3$ ) en de uitgebreidheid van de steekproef ook gering is (nl. 6). Het een en ander stemt overeen met de resultaten van par. 1.5.

Een soortgelijke exacte voorwaardelijke toetsingsmethode als zojuist beschreven voor de toets  $T_{n,1}$ , kan gegeven worden voor de toets  $T_{n,i}$  met dezelfde nulhypothese als  $T_{n,1}$ , maar een andere verzameling van toegelaten hypothesen (zie par. 1.1.1). Deze exacte toets berust op formule (1.9). De wijze van constructie van de kritieke zone is analoog met de zojuist beschrevene. Wij construeren weer een tabel van alle mogelijke splitsingen van  $X$  in  $m$  getallen, waarbij nu wel op de volgorde van deze getallen gelet wordt, tenminste als de getallen  $\frac{n_i}{n}$ , die in (1.9) optreden, niet alle aan elkaar gelijk zijn. Bij elk van deze splitsingen wordt weer de daarbij behorende kans uit (1.9) berekend. Verder worden de splitsingen geplaatst in volgorde van dalende waarden van  $\sum_i n_i \frac{(x_{i.} - x_{.})^2}{x_{.}}$ . Een kritieke zone met

grootte  $\leq \alpha$  wordt gevormd door in deze volgorde de kansen te sommeren totdat  $\alpha$  nog juist niet wordt overschreden. De splitsingen, die behoren bij de gesommeerde kansen vormen nu ons kritiek gebied. Daar deze toetsingsmethode na het voorgaande wel duidelijk zal zijn, laten wij de bespreking van een voorbeeld achterwege. Het is duidelijk, dat wanneer de steekproeven niet even groot zijn, deze exacte toetsingsmethode in de regel veel rekenwerk vereist. Zijn ze alle even groot, dan kunnen wij weer volstaan met alleen die splitsingen in de tabel op te nemen, die voldoen aan voorwaarde (1.21). Verder behoeven dan alleen de kansen, die bij deze splitsingen behoren, berekend te worden en daarna vermenigvuldigd te worden met de getallen  $\frac{K!}{k_1! \dots k_p!}$ . In het geval van steekproeven van verschillende uitgebreidheid moeten veel meer splitsingen beschouwd worden en dientengevolge ook veel meer waarschijnlijkheden berekend worden.

Een exacte toetsingsmethode corresponderend met  $T_{n,m}$  van tabel 1.2 is in wezen identiek met die voor  $T_{n,1}$ . Een exacte toetsingsmethode voor de nulhypothese  $H_m$ , dat elke steekproef uit een Poisson-verdeling komt, wordt o.m. verkregen door voor

elke steekproef afzonderlijk de hypothese  $H_i$ , dat de steekproef uit een Poisson-verdeling komt, te toetsen en daarna de overschrijdingskansen te combineren. Zijn de overschrijdingskansen  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , dan heeft  $-2 \log k_1 \dots k_m$  onder de te toetsen hypothese bij benadering een  $\chi^2$ -verdeling met  $2m$  vrijheidsgraden [30]. De kritieke zone met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  bestaat dan uit de waarden voor  $\chi^2$  met  $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ ;  $\chi^2_\alpha$  kan uit een tabel voor de  $\chi^2$ -verdeling bepaald worden. Hiermee zijn voor elk der toetsen van tabel 1,2 exacte toetsingsmethoden aangegeven.

Voor de gegeneraliseerde toetsen  $T_{n,i}$ ,  $T_{n,m}$  en  $T_{m,i}$  is in analogie met de methode aangegeven voor de toets  $T_{m,i}$  een exacte toets te geven; de kansen op de verschillende permutaties van een splitsing zijn dan ook bekend, maar ongelijk (zie b.v. 1.3').

De bovenbeschreven kritieke zones zijn in overeenstemming met die der dispersie-index-toets gekozen en zij zijn dus ook asymptotisch equivalent met de kritieke zones van de overeenkomstige  $\lambda$ -toets. Of deze keuze het meest onderscheidende kritieke gebied voor de beschouwde alternatieve hypothesen oplevert voor de kleine waarden, waarvoor de exacte toets gebruikt wordt, is moeilijk uit te maken. Behalve bovenstaand argument van de asymptotische gelijkheid is echter heuristisch wel in te zien dat de keuze van het kritieke gebied een goede is. Immers grote waarden van  $\sum x_i^2$  corresponderen steeds met splitsingen, waarin de waarden van de waarnemingen ver uiteenliggen. Onder een der alternatieve hypothesen zijn deze splitsingen veel waarschijnlijker dan onder de nulhypothese.

Voor een verdere beschrijving der exacte toetsen en toetsen, die hiermee verwant zijn, zij verwezen naar [6] en naar [26] voor het eenvoudigste geval, dat er slechts twee waarnemingen  $x_1$  en  $x_2$  zijn.

De twee waarnemingen  $x_1$  en  $x_2$  stellen in dit geval vaak het aantal "successen" voor bij twee reeksen onderling onafhankelijke experimenten, waarbij de kans op succes bij één experiment klein is. Beschouwt men ieder der reeksen experimenten als een steekproef, dan kan men de beschreven toets dus ook een toets voor twee steekproeven noemen. Dit zijn dan echter geen steekproeven uit Poisson-verdelingen; wel kan men natuurlijk  $x_1$  als een steekproef van omvang 1 uit een Poisson-verdeling beschouwen en  $x_2$  eveneens.

Voor dit geval van twee waarnemingen is over de eigenschappen van de exacte toets veel meer te zeggen. De voorwaardelijke verdeling van  $x_1$ , onder voorwaarde  $x_1 + x_2 = X$  en de nulhypothese is dan de binomiale verdeling met kans  $p = \frac{1}{2}$ , die in tegenstelling tot de multinomiale verdeling uitvoerig getabelleerd is. De exacte

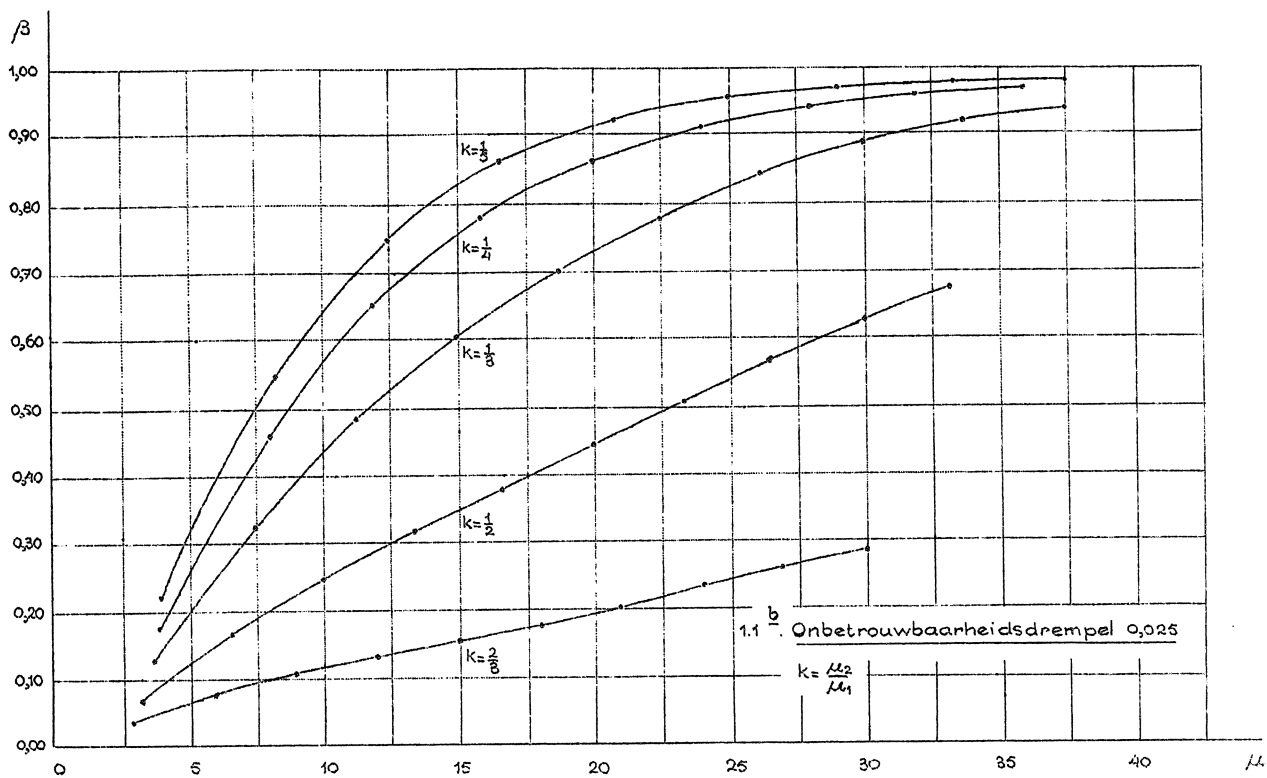
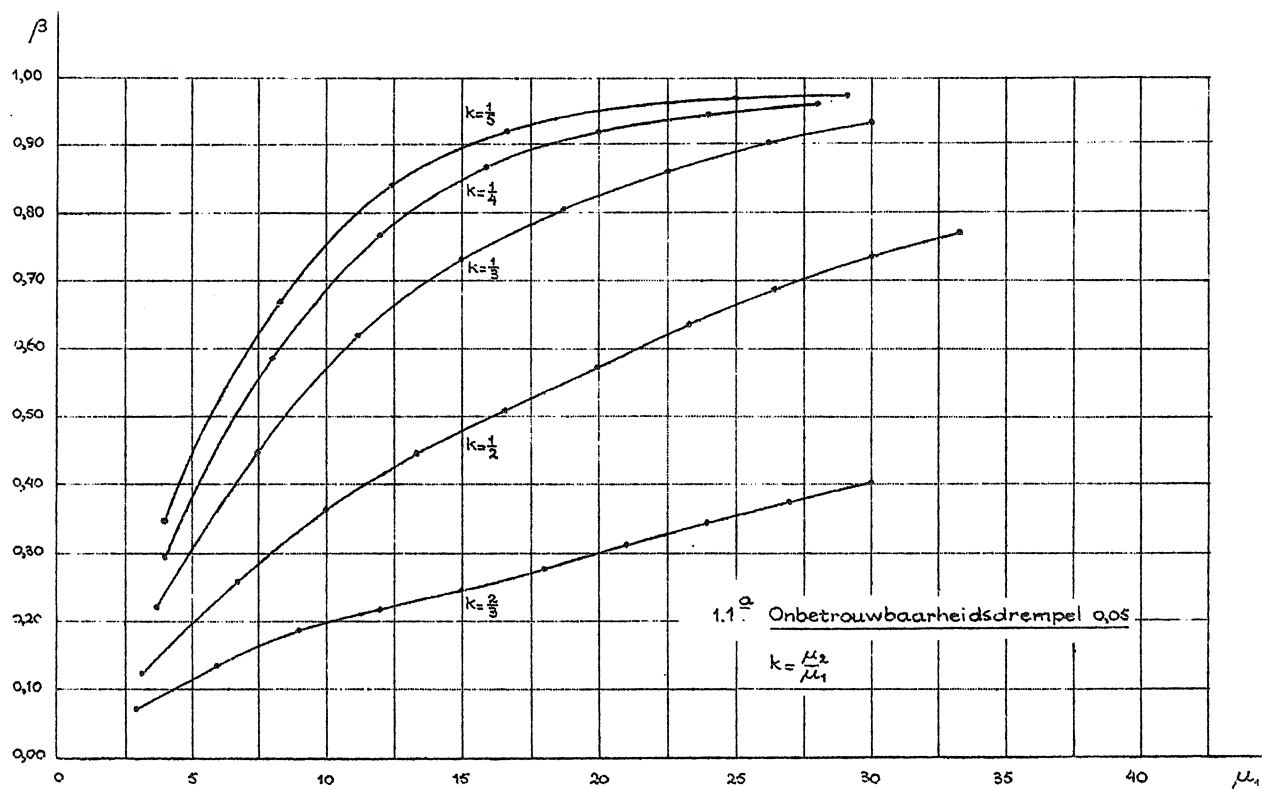


Fig. 1.1 Onderscheidingsvermogen van de eenzijdige toets voor gelijkheid van de gemiddelden van twee Poisson-verdeelde grootheden.

Tabel 1.6

Vergelijking van de momenten van de verdeling van  $\underline{Z}_{n,\mu}$  onder  $H_0$ , met die van de  $\chi^2$ -verdeling met  $(n-1)$  vrijheidsgraden.

| $n$ | $\mu$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3   | 25    | 1,00  | 0,99  | 0,97  | 1,01  |
| 5   | 5     | 1,00  | 0,96  | 0,94  | 1,08  |
|     | 2     | 1,00  | 1,00  | 1,25  | 1,00  |
| 10  | 2     | 1,00  | 0,95  | 1,05  | 1,19  |
| 5   | 2     | 1,00  | 0,89  | 0,85  | 1,21  |
| 25  | 1     | 1,00  | 0,96  | 1,34  | 1,22  |
| 10  | 1     | 1,00  | 0,89  | 1,10  | 1,39  |
| 5   | 1     | 1,00  | 0,76  | 0,70  | 1,44  |

KATHIRGAMATAMBY [14] benadert de verdeling van  $\underline{Z}_{n,\mu}$  onder  $H_0$  met een Pearson-kromme, een Gram-Charlier-ontwikkeling en een van een type ontwikkeld door JOHNSON. Bij deze benaderingen worden meer parameters aangepast dan bij gebruik van de  $\chi^2$ -benadering, zodat men mag aannemen, dat zij, tezamen beschouwd, een betrouwbaarder beeld van de werkelijke verdeling geven. Dat men toch de  $\chi^2$ -benadering liever gebruikt, berust natuurlijk op de vereenvoudiging der berekeningen, die men dan bereikt. Bij de waarde van  $\chi^2$  voor het 5%-punt rekent hij nu de overschrijdingskansen voor de drie bovengenoemde typen van benaderingsverdelingen uit voor  $\mu = 1, 5$  en  $10$  en  $n = 6, 11, 51, 101$  en  $201$ . De afwijkingen van  $0,05$  zijn gering ( $\pm 0,002$ ) behalve voor  $n = 6$ . De conclusie luidt dan ook, dat voor  $\mu \geq 1$  en  $n > 10$  de benadering met de  $\chi^2$ -verdeling redelijk is. Enkele van de benaderingsverdelingen geven een hogere waarde dan  $0,05$  en andere een lagere, zodat niet te zeggen is of de  $\chi^2$ -verdeling over- of onderschat is voor het  $0,05$ -punt. Voor  $\mu = 1$  geven alle genoemde typen een hogere waarde dan  $0,05$ , zodat voor kleine  $\mu$  de  $\chi^2$ -benadering vermoedelijk de overschrijdingskans onderschat. Exacte berekening, met behulp van de exacte toets (par. 1.5) zou dit kunnen bevestigen.

Een nadeel van de hier beschreven methode is dat niets gezegd wordt over de nauwkeurigheid van benadering van de ware verdeling van  $\underline{Z}_{n,\mu}$  door de gekozen benaderingsverdelingen. Dit maakt de resultaten min of meer onzeker.

KATHIRGAMATAMBY beschouwt ten slotte nog het onderscheidingsvermogen van de toets t.o.v. de klasse van alternatieven gevormd door samengestelde Poisson-verdelingen (zie par. 2.3).

Door exacte berekening is voor kleine waarden van  $n$  ( $n = 2, 3, 4, 5$ ) en van  $\sum x_i = X_i$  de voorwaardelijke exacte toets vergeleken met de  $\chi^2$ -toets door LANCASTER [15], COCHRAN [16], NEYMAN en PEARSON [17], SHANAWANY [18] en door PERYBOROWSKI en WILENSKI [19].

COCHRAN beschouwt het geval  $x_i = 2$  en  $n = 4$  en oordeelt de  $\chi^2$ -benadering voor dit geval slecht.

NEYMAN en PEARSON [17] en SHANAWANY [18] beschouwen een geval van de gegeneraliseerde toetsingsgrootheid  $\underline{z}'_{n,i}$  met  $v_i = 0, 2, 0, 3$  en  $0, 5$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $X_i = 10$  en  $n = 3$ . Zij vinden goede overeenstemming tussen de  $\chi^2$ -benadering en de exacte verdeling.

PRZYBOROWSKI en WILENSKI [19] hebben voor  $n = 2$  en  $X_i = 1$  t/m 80 de exacte voorwaardelijke verdeling vergeleken met de  $\chi^2$ -benadering; [19] geeft de resultaten in de vorm van tabellen. Wanneer  $n = 2$ , is de voorwaardelijke exacte verdeling de binomiale verdeling, zodat met behulp van een tabel van de binomiale verdeling alle in [19] ontbrekende gevallen eenvoudig na te gaan zijn. PRZYBOROWSKI en WILENSKI geven een beschouwing over de continuïteitscorrectie voor de  $\chi^2$ -benadering en nomogrammen over het onderscheidingsvermogen.

LANCASTER [15] heeft ten slotte een groter aantal gevallen behandeld, waarbij hij echter de  $\chi^2$ -benadering vrij ruw vergelijkt met de exacte verdeling. Hij berekent exact de kans dat de toetsingsgrootheid ligt in de intervallen aangegeven door quantile-punten 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9 en 1,0 van de  $\chi^2$ -verdeling en vergelijkt deze met de bijbehorende kansen van de  $\chi^2$ -verdeling: 10%, 20%, 20%, 20%, 20%, 10%. De gevallen  $n = 3$  en  $X_i = 6, \dots, 19$ ,  $n = 4$  en  $X_i = 6, \dots, 16$  en  $n = 5$  en  $X_i = 6, \dots, 10$  worden behandeld. Voor  $n = 3$  en  $X_i > 6$  is de benadering redelijk, de  $\chi^2$ -benadering overschat de overschrijdingskans, als deze klein is, voor kleine  $X_i$ . Is  $X_i > 10$ , dan is voor  $n = 4$  en  $n = 5$  de benadering ook redelijk.

Voor  $X_i = 16$  onderzocht LANCASTER bovendien nog de invloed van de variatie van  $n$  op de benadering. De resultaten zijn weinig overzichtelijk, maar mogelijk voor verder onderzoek bruikbaar.

Om het omvangrijke rekenwerk nodig voor de hierboven beschreven methode te vermijden hebben SUKHATME [20] e.a. experimenteel de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering onderzocht, door zeer veel trekkingen uit een aantal Poisson-verdelingen met dezelfde parameterwaarde te doen en hieruit de frequentiecurve van  $\underline{z}_{n,i}$



te bepalen. Deze frequentiecurve wordt vervolgens vergeleken met de  $\chi^2$ -verdeling. Bij voldoende grote aantallen zal deze methode tot betrouwbare uitkomsten kunnen leiden. SUKHATME vindt, dat voor  $n > 10$  of  $n > 15$  en  $\mu > 1$  de benadering redelijk is.

Hoewel elk van de bovenbeschreven methoden gebruik maakt van benaderingen of verwaarlozingen, suggereert de onderlinge overeenstemming tussen de gevonden conclusies, dat de gebruikte methoden zeker voldoende nauwkeurig zijn.

Samenvattend kan gezegd worden, dat voor  $\underline{z}_{n,}$  voor kleine  $X_i$  en  $n$ , elk geval afzonderlijk beschouwd moet worden, waarbij het reeds gepubliceerde van dienst kan zijn. Voor grote waarden van  $X_i$  of  $n$  of voor beide zijn algemenere regels te geven. Voor  $n > 10$  en  $\mu > 1$ , zal in het algemeen de  $\chi^2$ -benadering redelijk zijn.

De andere dispersieindices zijn nog niet onderzocht op de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering, echter zal van bovenbeschreven methoden gebruik kunnen worden gemaakt om voor speciale in de praktijk voorkomende gevallen de nauwkeurigheid van de verdeling te onderzoeken. NEYMAN en PEARSON [17] en SHANAWANY [18] beschouwen een geval van  $\underline{z}'_{n,}$ .

Iets algemenere literatuur over deze toetsingsmethoden, het onderscheidingsvermogen en de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering is te vinden in [21] en [22].

#### 1.6. Een asymptotische toetsingsmethode, die berust op het aantal nullen onder de waarnemingen.

Beschouwen wij nog eens formule (1.3). Wij zagen daar, dat de voorwaardelijke verdeling van de  $\underline{x}_{ij}$  een multinomiale verdeling met gelijke kansen is. Wij kunnen dit resultaat enigszins anders interpreteren: (1.3) is ook gelijk aan de kans, dat er bij aselechte verdeling (14) van  $X$  voorwerpen over  $n$  vakken met gelijke kansen voor ieder vak,  $\underline{x}_{ij}$  dingen in het vak met nummers  $(i,j)$  terecht komen. Het aantal lege vakken, d.w.z. het aantal nullen onder de waarnemingen, is een stochastische grootheid  $\underline{h}$ . De exacte verdeling van  $\underline{h}$  wordt gegeven door:

$$(1.23) \quad P[\underline{h} = h] = \binom{n}{h} \sum_{v=0}^{n-h} (-1)^v \binom{n-h}{v} \left(1 - \frac{h+v}{n}\right)^X$$

De afleiding van deze formule is op verschillende plaatsen in de literatuur te vinden, o.a. [1] (pp. 69-74), [23]. Nemen  $n$ , het aantal waarnemingen, en  $X$ , de som van de waarnemingen, onbeperkt toe, terwijl  $\beta = n e^{-\frac{X}{n}}$  begrensd blijft, dan geldt:

$$(1.24) \quad P[\underline{h} = h] = \frac{e^{-\beta} \beta^h}{h!} \longrightarrow 0$$

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen wij weer naar [1] (pp. 69-74) en [23];  $\underline{h}$  bezit dus, onder de te toetsen hypothese, asymptotisch een Poissonverdeling met parameter

$$\beta = n e^{-\frac{1}{n} X}$$

In het voorgaande hebben wij waarnemingsresultaten met een grote spreiding in de waarnemingen tot de kritieke zones gerekend. Een relatief groot aantal nullen onder de waarnemingen wijst eveneens op een grote spreiding in de waarnemingen. In overeenstemming hiermee stellen wij nu de kritieke zone samen uit grote waarden van  $\underline{h}$ . Op die wijze verkrijgen wij een toets, waarvan wij onderscheidingsvermogen kunnen verwachten met betrekking tot dezelfde alternatieve hypothesen als die van de eerder beschreven toetsen. Bij gegeven onbetrouwbaarheid  $\alpha$  wordt de kritieke zone dan gevormd door de waarden  $\underline{h} \geq h_\alpha$ , waarbij  $h_\alpha$  het kleinste getal is waarvoor geldt:

$$\sum_{h=h_\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\beta} \beta^h}{h!} < \alpha \quad ; \quad \left( \beta = n e^{-\frac{1}{n} X} \right).$$

$h_\alpha$  kan gemakkelijk met behulp van een tabel voor de termen van de Poissonverdeling bepaald worden. Wij zullen later zien, dat de kans op nullen onder de waarnemingen bij vele discrete verdelingen, o.a. bij alle samengestelde Poissonverdelingen (zie hoofdstuk 2) groter is dan de kans op nullen bij een gewone Poissonverdeling met hetzelfde gemiddelde. Ten opzichte van al deze verdelingen zal dus deze toetsingsmethode eveneens onderscheidend zijn. Aan de andere kant is het op intuïtieve gronden wel duidelijk, dat deze methode ten achter zal staan bij de toetsingsmethoden beschreven in de voorgaande paragrafen, daar veel minder eigenschappen van de waarnemingen bij de toetsing gebruikt worden. Hiermee correspondeert, dat de schatting van de parameter  $\mu$ , die berust op het aantal nullen onder de waarnemingen, in zekere zin "minder goed" is dan de meest aannemelijke schatting (13)  $X_n$  voor  $\mu$ . Zie hiervoor par. 3.1.

De benadering (1.24) voor de exacte verdeling van  $\underline{h}$  (1.23) is alleen voldoende nauwkeurig voor grote waarden van  $n$  en  $X$ . Beide moeten b.v. groter dan 100 zijn.

Deze methode is dus bruikbaar in die gevallen, waarin de  $X_n^2$ -benadering voor de dispersie-index-toetsen mogelijk niet voldoet:  $X$  groot en  $n$  groot, terwijl  $\frac{X}{n}$  klein is t.o.v. 1, dus in geval er veel meer lege dan niet lege vakken zijn.

## HOOFDSTUK 2

### Toetsingsproblemen met speciale typen van verdelingsfuncties als alternatieve hypothesen.

#### 2.1. Inleiding.

Wanneer men een bepaalde hypothese wenst te toetsen, moet men bij de keuze van de toetsingsgrootheid en van het kritieke gebied rekening houden met de alternatieve hypothesen, waartegen men die hypothese wenst te toetsen. Men tracht deze keuze zo te doen, dat de verkregen toets zekere optimale eigenschappen bezit; in het bijzonder zal men proberen het onderscheidingsvermogen zo groot mogelijk te maken voor de gekozen alternatieven.

De toetsingstheorie leert, dat de  $\lambda$ -toets een toetsingsmethode is, die in het algemeen asymptotisch dergelijke optimale eigenschappen heeft. In hoofdstuk 1 werd van de daar besproken toetsen aangetoond, dat deze, met betrekking tot de daar toegelaten klasse van hypothesen, asymptotisch equivalent zijn met  $\lambda$ -toetsen. De toetsingsgrootheden waren daarbij oorspronkelijk op intuïtieve gronden gekozen.

In het volgende zal, eveneens op intuïtieve wijze, aanvaardbaar gemaakt worden, dat de toetsingsgrootheden uit hoofdstuk 1 ook onderscheidend zijn voor andere alternatieven. Vervolgens zal voor deze alternatieven bewezen worden, dat de toetsen asymptotisch onderscheidend (16) zijn.

Beschouw de toetsingsgrootheden uit de tabellen 1.2 en 1.3 (resp. in par. 1.1 en par. 1.2). Deze hebben alle op een constante factor na de gedaante van de geschatte variantie gedeeld door een geschat gemiddelde. Voor de Poissonverdeling is de verwachting van deze verhouding gelijk aan 1 (2). Beschouwt men nu als alternatieven types verdelingsfuncties met verhouding van variantie en gemiddelde  $> 1$  of  $< 1$ , dan is te verwachten, dat een toets met een dergelijke toetsingsgrootheid asymptotisch onderscheidend zal zijn voor deze alternatieven; dit wordt dan ook in par. 2.2, onder zwakke onderstellingen, aangetoond. Of de toets de meest onderscheidende (15) is, moet hier in het midden gelaten worden.

Voorbeelden: Het quotient van variantie en gemiddelde is voor de binomiale verdeling met parameters  $N$  en  $p$  gelijk aan  $1-p$  en dus  $< 1$ , zodat verwacht mag worden, dat voor een binomiale verdeling met gegeven parameters de besproken toets, linkseenzijdig toegepast, asymptotisch onderscheidend is. Dit zal verderop dan ook bewezen worden (zie ook [33]). Daar de Poissonverdeling opgevat kan worden als limiet ( $p \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , terwijl  $Np \rightarrow \mu$ ) van de bi-

nomiale verdeling is het duidelijk, dat het onderscheidingsvermogen afneemt, naarmate  $p$  bij vaste  $N$  kleiner wordt. Voor gegeven  $N$  en  $p$  is de toets echter steeds asymptotisch onderscheidend.

Voor de hierna te bespreken samengestelde Poissonverdelingen (zie par. 2.4) is het quotient van variantie en gemiddelde

$$1 + \frac{\text{Var } \mu}{\mathcal{E} \mu}$$

waarin  $\text{Var } \mu$  de variantie van de hier stochastische parameter  $\mu$  van de Poissonverdeling voorstelt en  $\mathcal{E} \mu$  het gemiddelde daarvan. Beide grootheden zijn positief, zodat het quotient van variantie en gemiddelde  $> 1$  is. De toetsen gebaseerd op de dispersie-indices, in dit geval rechtseenzijdig toegepast, zijn ook asymptotisch onderscheidend voor samengestelde Poissonverdelingen als alternatieven. Wij beschouwen in par. 2.3 in het bijzonder een bepaalde klasse van deze verdelingen, het z.g. type A van NEYMAN (literatuur: [34], [35], [14]).

De bovenbeschreven toetsen zijn eenzijdige toetsen. Men kan echter de twee toetsen samenstellen tot een tweezijdige. De alternatieven bestaan dan uit "verdelingsfunctie met verhouding van variantie en gemiddelde  $> 1$  of  $< 1$ ". In de praktijk wordt meestal een afwijking naar een van deze groepen verdelingsfuncties verwacht, zodat meestal eenzijdig getoetst wordt.

Enkele praktische voorbeelden mogen het nut van dergelijke toetsingsmethoden toelichten (zie ook [22] en de inleiding):

1. Men telt in verschillende even grote volumina van eenzelfde bloedmonster het aantal rode bloedlichaampjes. Op grond van de eigenschappen van het experiment zou men besluiten tot het model van de Poissonverdeling, als benadering voor een binomiale verdeling met kleine kansen (zie voorbeeld A 1 van de inleiding). Echter beperkt het volume van het rode bloedlichaampje het totale aantal bloedlichaampjes, dat in een gegeven volume kan voorkomen. Is het gemiddelde aantal bloedlichaampjes per beschouwd volume klein ten opzichte van deze bovengrens (b.v. ten gevolge van verdunning van het bloed), dan heeft deze beperking weinig invloed en zal het model der Poissonverdeling gewoonlijk voldoen. Wanneer echter het gemiddelde aantal bloedlichaampjes dicht bij de genoemde bovengrens ligt, dan moet men verwachten, dat afwijking van de Poissonverdeling optreedt en wel zal de werkelijke verdeling een quotient van variantie en gemiddelde  $< 1$  hebben, daar de bloedlichaampjes elkaar gaan "verdringen"; waarden, die iets groter dan het gemiddelde zijn, zijn dan reeds niet meer

mogelijk en de variantie wordt hierdoor verkleind. In dit geval zal men willen toetsen of het Poissonmodel verworpen moet worden of niet en men zal dan dus linkseenzijdig toetsen. BERKSON [33] bespreekt dit geval en verwerpt in een concreet geval de nulhypothese ten gunste van een binomiale verdeling voor het aantal bloedlichaampjes in een vakje.

2. Eenzelfde geval doet zich voor wanneer men de verdelingsfunctie beschouwt van de aantallen vliegtuigen, die in een zekere periode op een vliegveld landen. Ook dit aantal is beperkt doordat ieder vliegtuig een zekere landingstijd nodig heeft gedurende welke tijd geen ander vliegtuig kan landen. Komen er dan ook zoveel vliegtuigen bij het vliegveld aan, dat het gemiddelde aantal van de orde van grootte van het maximum aantal is, dat per tijdseenheid kan landen, dan zal het model van de Poissonverdeling, dat bij kleine verkeersdichtheid veelal goed voldoet, vervangen moeten worden door een met quotient van variantie en gemiddelde  $< 1$ . Toetsing kan dan uitmaken wanneer aan het Poissonmodel niet meer voldaan wordt.

3. Een zoveel mogelijk homogeen proefveld wordt verdeeld in een aantal proefvelden van gelijk oppervlak. Op het proefveld deponeert een bepaald insect legfels eieren, waaruit larven komen in een bepaald jaargetijde. Op deze larven wordt een insectendodend middel beproefd. Korte tijd nadat het middel is toegepast wordt het aantal overlevende larven per vierkant geteld. Is het middel goed, dan is de kans, dat een larve in leven blijft klein. Het aantal eieren per vierkant is groot, zodat het model van de binomiale verdeling voor de verdeling van de aantallen overlevenden per vierkant vervangen kan worden door dat van de Poissonverdeling (zie voorbeeld A 3 van de inleiding). Wanneer alle vierkanten evenveel,  $N$ , eieren zouden bevatten en de overlevingskans  $p$  is, zijn alle aantallen Poisson-verdeeld met eenzelfde gemiddelde  $Np$ . De insecten leggen de eieren echter in legfels van grote hoeveelheden bij elkaar, zodat  $N$  niet voor alle vierkanten gelijk zal zijn, maar sterk uiteen zal lopen. Het aantal legfels per vierkant is als een stochastische grootheid te beschouwen. De waarnemingen van het totale aantal overlevende larven per vierkant zullen nu in het algemeen geen Poissonverdeling bezitten, maar een samengestelde Poissonverdeling, d.w.z. een Poissonverdeling met een parameterwaarde  $\mu$  die zelf een waarschijnlijkheidsverdeling bezit.

Door rechtseenzijdige toetsing met behulp van de dispersie-index kan men nagaan of het model van de Poissonverdeling in een bepaald geval verworpen moet worden ten gunste van de samen-

gestelde Poissonverdeling of niet.

4. Een zeer belangrijke toepassing is de statistische beschrijving van ongevallen van arbeiders (zie par. 1.2 en de inleiding voorbeeld B 1). In [39] wordt hieraan een uitvoerige beschouwing gewijd. Het begrip van de individuele "vatbaarheid" van arbeiders voor ongevallen komt hierbij naar voren (in het Engels wordt dit "accident proneness" genoemd). De bedrijfsleiding wil vaak weten welke arbeiders steeds veel ongelukken hebben. Deze "vatbaarheid" voor ongevallen van een arbeider kan ook met de tijd variëren: één arbeider kan in een bepaald tijdsinterval veel "vatbaarder" zijn voor ongevallen dan in een ander interval.

Voor vorming van een statistisch model kunnen we als volgt te werk gaan. Onderstel, dat voor een zeer korte periode  $(t, t+dt)$  het aantal ongelukken voor één arbeider (de  $i^{\text{de}}$ ) een Poissonverdeling heeft met parameter  $\lambda_i$ . Van deze parameter onderstellen we, dat deze een verdelingsfunctie  $F_i(\lambda_i)$  bezit over de beschouwde tijdsintervallen. Voor één arbeider is dan het aantal ongevallen in een bepaalde periode een trekking uit een samengestelde Poissonverdeling. Voor  $n$  arbeiders heeft het aantal ongevallen in de korte periode  $(t, t+dt)$  eveneens een Poissonverdeling met parameter  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Deze parameter  $\lambda$  heeft weer een verdelingsfunctie  $F(\lambda)$ , zodat voor  $n$  arbeiders het totale aantal ongevallen eveneens een samengestelde Poissonverdeling bezit. Voor veel gevallen is dit model een veel beter model dan dat van de Poissonverdeling, die hiervoor in de voorbeelden van de inleiding (B 1) en par. 1.2 werden gegeven. Vaak zal door toetsing uitgemaakt moeten worden of het model van de Poissonverdeling verworpen moet worden. Is dit laatste het geval, dan kan vaak een samengestelde Poissonverdeling als model goed dienst doen.

## 2.2. Het onderscheidingsvermogen van de dispersie-index-toetsen $T$ voor de alternatieven: discrete verdelingen met quotiënt van variantie en gemiddelde $< 1$ of $> 1$ . In het bijzonder: de binomiale verdeling als alternatief.

In deze paragraaf zal bewezen worden, dat een der dispersie-index-toetsen  $T$  uit de tabellen 2 en 3 onderscheidend is voor de aangegeven alternatieven. Voor de andere toetsen is de methode van het bewijs hetzelfde. Als voorbeeld nemen wij hier voor de eenvoud  $T_{n,1}$ .

De toetsingsgrootheid

$$(1.4) \quad Z_{n,1} = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}}$$

heeft onder de nulhypothese asymptotisch een  $\chi^2$ -verdeling met  $(n-1)$  vrijheidsgraden. Asymptotisch geldt dus

$$(2.1) \quad \begin{aligned} E Z_{n,1} &= n-1 \\ \sigma \{Z_{n,1}\} &= \sqrt{2(n-1)} \end{aligned}$$

zodat volgens de ongelijkheid van Bienaymé-Tchebycheff (15a)

$$(2.2) \quad Z \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Z_{n,1}}{n-1} = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}}$$

onder de nulhypothese voor  $n \rightarrow \infty$  in waarschijnlijkheid convergeert naar 1.

We zullen nu bewijzen, dat  $Z$  onder ieder der bovenstaande alternatieve hypothesen  $H$  voor  $n \rightarrow \infty$  in waarschijnlijkheid convergeert naar een waarde  $\theta < 1$  of  $> 1$ , zodat voor  $\theta < 1$

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_H \{Z < \theta + \varepsilon\} = 1 \quad 0 < \varepsilon < 1 - \theta$$

en voor  $\theta > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_H \{Z > \theta - \varepsilon\} = 1 \quad 0 < \varepsilon < \theta - 1$$

(2.3) geeft aan dat het asymptotische onderscheidingsvermogen 1 is.

Onderstel, dat onder de alternatieve hypothese  $H$  de waarnemingen kansen uit discrete verdelingen met dezelfde gemiddelden  $\mu$ , eindige eventueel ongelijke varianties  $\sigma_i^2$  ( $i=1, \dots, n$ ), eindige eventueel ongelijke gereduceerde vierde momenten  $\mu_4^i$  ( $i=1, \dots, n$ ), terwijl

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum \sigma_i^2 = \bar{\sigma}^2 \quad \text{bestaat en} \quad \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu} \neq 1$$

Nu is, onder deze hypothese  $H$ :

$$\begin{aligned} (2.5) \quad E \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} &= E \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} - E \frac{n}{n-1} (\bar{x} - \mu)^2 = \\ &= \frac{\sum \sigma_i^2}{n-1} - E \frac{(\sum (x_i - \mu))^2}{n(n-1)} = \frac{\sum \sigma_i^2}{n-1} - \frac{\sum \sigma_i^2}{n(n-1)} = \frac{\sum \sigma_i^2}{n} \end{aligned}$$

De voorlaatste stap maakt gebruik van de onderlinge onafhankelijkheid der waarnemingen, zodat  $E(x_i - \mu)(x_j - \mu) = 0$  voor  $i \neq j$ .

Verder vinden we de variantie van  $\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$  onder H als volgt:

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad & \mathcal{E} \left\{ \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right\}^2 - \left( \sum \frac{\sigma_i^2}{n} \right) = \\
 & = \mathcal{E} \left\{ \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} - \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{n-1} \right\}^2 - \left( \sum \frac{\sigma_i^2}{n} \right)^2 = \\
 & = \mathcal{E} \left\{ \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \right\}^2 - 2 \mathcal{E} \left\{ \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \cdot \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{n-1} \right\} + \mathcal{E} \left\{ \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{n-1} \right\}^2 - \left( \sum \frac{\sigma_i^2}{n} \right)^2
 \end{aligned}$$

De eerste drie termen uit (2.6) zullen we afzonderlijk berekenen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} \left\{ \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \right\}^2 &= \mathcal{E} \left\{ \sum \frac{(x_i - \mu)^4}{(n-1)^2} \right\} + \mathcal{E} \sum_{i \neq j} \left\{ \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \cdot \frac{(x_j - \mu)^2}{n-1} \right\} = \\
 &= \frac{\sum \tilde{\mu}_i^4}{(n-1)^2} + \sum_{i \neq j} \mathcal{E} \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \cdot \mathcal{E} \frac{(x_j - \mu)^2}{n-1} = \\
 &= \frac{\sum \tilde{\mu}_i^4}{(n-1)^2} + \sum_{i \neq j} \frac{\sigma_i^2 \cdot \sigma_j^2}{(n-1)^2}
 \end{aligned}$$

De voorlaatste stap weer op grond der onafhankelijkheid van  $x_i$  en  $x_j$  voor  $i \neq j$ . Voor de tweede term uit (2.6) vinden we

$$\begin{aligned}
 & - 2 \mathcal{E} \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \cdot \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{n-1} = \\
 & = - 2 \mathcal{E} \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \cdot \frac{\left( \sum_j (x_j - \mu) \right)^2}{n(n-1)} = \\
 & = - 2 \mathcal{E} \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \cdot \frac{\left\{ \sum_j (x_j - \mu)^2 + \sum_{j \neq i} (x_j - \mu)(x_i - \mu) \right\}}{n(n-1)} = \\
 & = - 2 \mathcal{E} \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \cdot \sum_j \frac{(x_j - \mu)^2}{n(n-1)} - 2 \mathcal{E} \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1} \sum_{j \neq i} \frac{(x_j - \mu)(x_i - \mu)}{n(n-1)} = \\
 & = - \frac{2}{n} \mathcal{E} \left( \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{(n-1)} \right)^2 = \\
 & = - \frac{2}{n} \left\{ \frac{\sum \tilde{\mu}_i^4}{(n-1)^2} + \sum_{i \neq j} \frac{\sigma_i^2 \cdot \sigma_j^2}{(n-1)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

De laatste overgang is boven reeds berekend; de tweede term uit



de vierde stap verdwijnt, omdat  $\underline{x}_i$  en  $\underline{x}_j$  onafhankelijk zijn.

Voor de derde term uit (2.6) vinden we

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \frac{n^2}{(n-1)^2} (\bar{x} - \mu)^4 &= \mathcal{E} \frac{n^2}{(n-1)^2} \frac{(\sum_i (\underline{x}_i - \mu))^4}{n^4} = \\ &= \mathcal{E} \frac{\sum_i (\underline{x}_i - \mu)^4 + 4 \sum_{i \neq j} (\underline{x}_i - \mu)(\underline{x}_j - \mu)^3 + 3 \sum_{i \neq j} (\underline{x}_i - \mu)^2 (\underline{x}_j - \mu)^2}{n^2 (n-1)^2} = \\ &= \frac{\sum \tilde{\mu}_y^4}{n^2 (n-1)^2} + \frac{3 \sum_{i \neq j} \sigma_i^2 \sigma_j^2}{n^2 (n-1)^2} \end{aligned}$$

Met behulp van de laatste drie resultaten kunnen we voor (2.6) schrijven:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left\{ \sum_i \frac{(\underline{x}_i - \bar{x})^2}{n-1} \right\} &= \\ &= \frac{\sum \tilde{\mu}_y^4}{(n-1)^2} + \frac{\sum_{i \neq j} \sigma_i^2 \sigma_j^2}{(n-1)^2} - \frac{2 \sum \tilde{\mu}_y^4}{n(n-1)^2} - \frac{2 \sum_{i \neq j} \sigma_i^2 \sigma_j^2}{n(n-1)^2} + \\ (2.7) \quad &+ \frac{\sum \tilde{\mu}_y^4}{n^2 (n-1)^2} + \frac{3 \sum_{i \neq j} \sigma_i^2 \sigma_j^2}{n^2 (n-1)^2} - \frac{(\sum \sigma_i^2)^2}{n^2} = \\ &= \frac{\sum \tilde{\mu}_y^4}{n^2} + \frac{2 \sum_{i \neq j} \sigma_i^2 \sigma_j^2}{n^2 (n-1)^2} - \frac{\sum \sigma_i^4}{n^2} \end{aligned}$$

We hebben dus in die gevallen, waarin deze som voor  $n \rightarrow \infty$  tot nul daalt (b.v. als  $\tilde{\mu}_y^i$  en  $\sigma_i$  begrensd zijn of als de grootste der  $\tilde{\mu}_y^i$  en de grootste der  $\sigma_i^4$   $\sigma(n)$  zijn):

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \left\{ \sum_i \frac{(\underline{x}_i - \bar{x})^2}{n-1} \right\} = 0$$

Met behulp van de ongelijkheid van Bienaymé-Tchebycheff volgt dan uit (2.4), (2.5) en (2.8), dat onder H

$$(2.9) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu}} \sum_i \frac{(\underline{x}_i - \bar{x})^2}{n-1} = 1$$

Voor de noemer van (2.2) geldt onder H zoals gemakkelijk in te zien is:

$$\mathcal{E} \left\{ \bar{x} \right\} = \mu$$

en

$$(2.10) \quad \sigma^2 \left\{ \bar{x} \right\} = \frac{1}{n^2} \sum \sigma_i^2$$

zodat men volgens de ongelijkheid van BIENAYMÉ-TCHEBYCHEFF heeft

$$(2.11) \quad \lim_{\substack{pr \\ n \rightarrow \infty}} \bar{x} = \mu$$

derhalve geldt ook:

$$(2.12) \quad \lim_{\substack{pr \\ n \rightarrow \infty}} z = \lim_{\substack{pr \\ n \rightarrow \infty}} \frac{\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}{\bar{x}} = \frac{\tau}{\mu} \neq 1.$$

$z$  convergeert dus onder de alternatieve hypothese  $H$  naar een waarde  $\neq 1$ , terwijl  $z$  onder  $H_0$  tot de waarde 1 convergeert; de toets is dus asymptotisch onderscheidend voor deze alternatieven. Ditzelfde geldt dan uiteraard indien  $z_{n,1} = (n-1)z$  als toetsingsgrootte gebruikt wordt, daar de toets hierdoor niet verandert.

De bewijzen voor de andere toetsen uit de tabellen 2 en 3 verlopen geheel analoog onder dezelfde voorwaarden voor de eerste vier momenten.

De binomiale verdeling is een voorbeeld van een discrete verdelingsfunctie, waarvoor  $\xi z < 1$ , dus  $\xi z_{n,1} < n-1$ . Het bewijs dat boven gegeven is zegt nog niets over de snelheid van convergentie, dus over de grootte van het onderscheidingsvermogen als functie van  $n$ . Voor de binomiale verdeling valt hierover wel iets te zeggen, wanneer de parameter  $N$  van deze verdeling maar groot genoeg is.

Immers onder de hypothese, dat alle waarnemingen uit eenzelfde binomiale verdeling met parameters  $N$  en  $p$  komen, is bekend dat

$$\underline{d} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x} (1 - \frac{\bar{x}}{N})} = \frac{z_{n,1}}{1 - \frac{\bar{x}}{N}}$$

asymptotisch een  $\chi^2$ -verdeling met  $(n-1)$  vrijheidsgraden bezit.

Nu is

$$\lim_{\substack{pr \\ N \rightarrow \infty}} \left(1 - \frac{\bar{x}}{N}\right) = 1 - p,$$

zodat asymptotisch voor grote  $N$  geldt:

$$(2.13) \quad \underline{d} (1 - p) \approx z_{n,1}$$

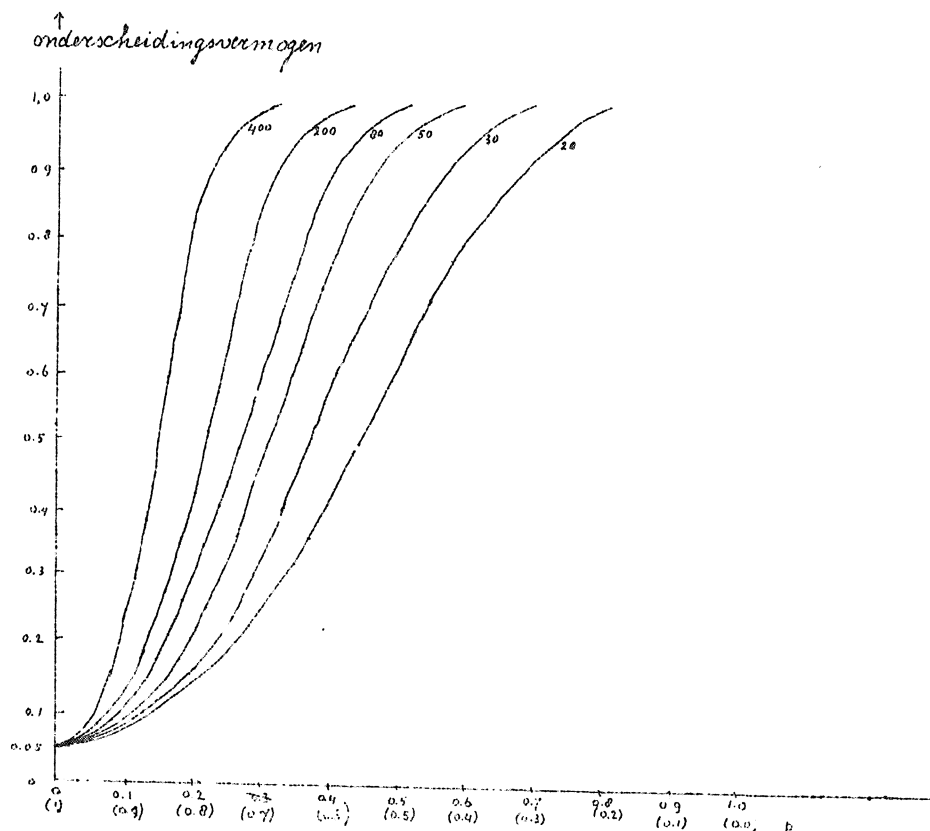
De verdeling van  $\underline{d}$  is bekend, dus ook de verdeling van  $z_{n,1}$  onder de alternatieve hypothese  $H$ , dat de waarnemingen uit eenzelfde binomiale verdeling  $(N, p)$  komen.

In grafiek 2.1 is voor verschillende waarden van  $n$  het op deze wijze benaderde onderscheidingsvermogen als functie van  $p$  weergegeven. Kleine waarden van  $n$  zijn weggelaten, omdat de  $\chi^2$ -benadering alleen goed is voor grote  $n$ .

Het onderscheidingsvermogen volgens de grafiek is dus geen-zins exact. De  $\chi^2$ -benadering voor de verdeling van  $\underline{d}$  is goed als  $Np$  groot is én  $n$  groot is, terwijl  $N$  groot moet zijn opdat (2.13) geldt. Voor  $Np > 5$  en  $n > 10$  is volgens HOEL [13] de  $\chi^2$ -benadering al goed; (2.13) is een goede benadering als  $N > 20$  en  $p < 0,5$ . De grafiek is dus bruikbaar voor praktische gevallen, waarvoor  $N > 20$ ;  $p < 0,5$ ;  $Np > 5$  en  $n > 10$ .

Grafiek 2.1

Het benaderde onderscheidingsvermogen van  $\underline{Z}_{n,p}$  wanneer de binomiale verdeling met parameters  $N, p$  als alternatief wordt beschouwd.



Opmerkingen.

1. In een discussie tussen BERKSON en CAMP wordt deze toetsing met  $\underline{Z}_{n,1}$  uitvoerig besproken met een binomiale verdeling als alternatief (BERKSON [33]).

2. De toetsingsgrootheid  $\underline{d}$  wordt als toetsingsgrootheid gebruikt om homogeniteit te toetsen in een  $2 \times k$ -tabel. De toetsingsgrootheid is ook te gebruiken om te toetsen of de parameterwaarde  $N$  van een binomiale verdeling gelijk is aan  $N_0$ , met als alternatieven  $N > N_0$  en als limietgeval de Poissonverdeling. HOEL beschrijft dit in [37]. De toets blijkt voor dit geval asymptotisch een beste kritieke zone te hebben.

2.3. De samengestelde Poissonverdeling met twee parameters; het type A van NEYMAN als alternatieve verdeling.

Veronderstel dat de parameter  $\mu$  van een Poissonverdeling verschillende waarden  $\mu_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) kan aannemen met kansen  $p_j$ . Dus  $\mu$  is stochastisch en:

$$P[\mu = \mu_j] = p_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

Dan geldt:

$$P[\underline{x} = x | \mu_j] = \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^x}{x!}$$

en

$$(2.14) \quad P[\underline{x} = x] = \sum_j p_j \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

De verdeling (2.14) wordt een samengestelde Poissonverdeling genoemd. Heeft  $\mu$  ook een Poissonverdeling (gewoonlijk op een schaalverandering na), dan noemt men de verdeling van  $\underline{x}$  wel een dubbele Poissonverdeling. NEYMAN, zie [38], heeft in verband met bepaalde besmettingsproblemen, verdelingen van het type (2.14) en aanverwante verdelingen onderzocht. In zijn schema wordt (2.14), wanneer  $\mu$  op een schaalverandering na een Poissonverdeling bezit, aangeduid met samengestelde Poissonverdeling met twee parameters, type A. Ook deze naam komt men in de literatuur veel tegen. Voor deze verdeling geldt:

$$\mu_j = j \cdot \mu \quad \text{en} \quad p_j = \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}$$

(2.14) wordt dan:

$$\begin{aligned}
 P[\underline{x} = \underline{x}] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \frac{e^{-j\mu} (j\mu)^x}{x!} \\
 (2.15) \qquad &= \frac{e^{-\lambda} \mu^x}{x!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(e^{-\mu} \lambda)^j j^x}{j!}
 \end{aligned}$$

Zoals wij zien komen in (2.15) twee parameters  $\lambda$  en  $\mu$  voor. (2.15) levert voor vele biologische en fysische processen een goed waarschijnlijkheidstheoretisch model en is daarom van groot belang (zie voorbeeld over insecticiden uit par. 2.1 en uit de algemene inleiding). Op eenvoudige wijze kan worden aangetoond, dat geldt:

$$E \underline{x} = \lambda \mu$$

en

$$(2.16) \qquad Var \underline{x} = \lambda \mu (1 + \mu)$$

Zie hiervoor par. 2.4: (2.19), (2.20) en (2.21).

Uit (2.16) volgt, dat de verhouding  $\frac{Var \underline{x}}{E \underline{x}} = 1 + \mu > 1$  is. Volgens par. 2.2 is dus de toets met  $\underline{z}_{n,1}$  als toetsingsgrootheid, rechtseenzijdig toegepast, asymptotisch onderscheidend voor deze alternatieven.

P.G.HOEL heeft gebruik makend van een door R.A.FISHER ontwikkelde techniek de eerste 4 momenten van  $\underline{z}_{n,1}$  berekend voor het geval, dat de  $\underline{x}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) uit een Poissonverdeling komen [3]. Op deze wijze was het hem mogelijk een oordeel te verkrijgen over de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering voor  $\underline{z}_{n,1}$  (zie par. 1.5). G.J.BATEMAN <sup>34</sup> heeft op dezelfde wijze de eerste 4 momenten van  $\underline{z}_{n,1}$  berekend voor het geval, dat de  $\underline{x}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) uit een dubbele Poissonverdeling komen. Voor  $E \underline{x} = \lambda \mu$  groot vindt hij:

$$\begin{aligned}
 \mu_1(\underline{z}_{n,1}) &\sim (k-1)(1+\mu) \\
 \mu_2(\underline{z}_{n,1}) &\sim 2(k-1)(1+\mu)^2 \\
 \mu_3(\underline{z}_{n,1}) &\sim 8(k-1)(1+\mu)^3 \\
 \mu_4(\underline{z}_{n,1}) &\sim 12(k-1)(k+3)(1+\mu)^4
 \end{aligned}$$

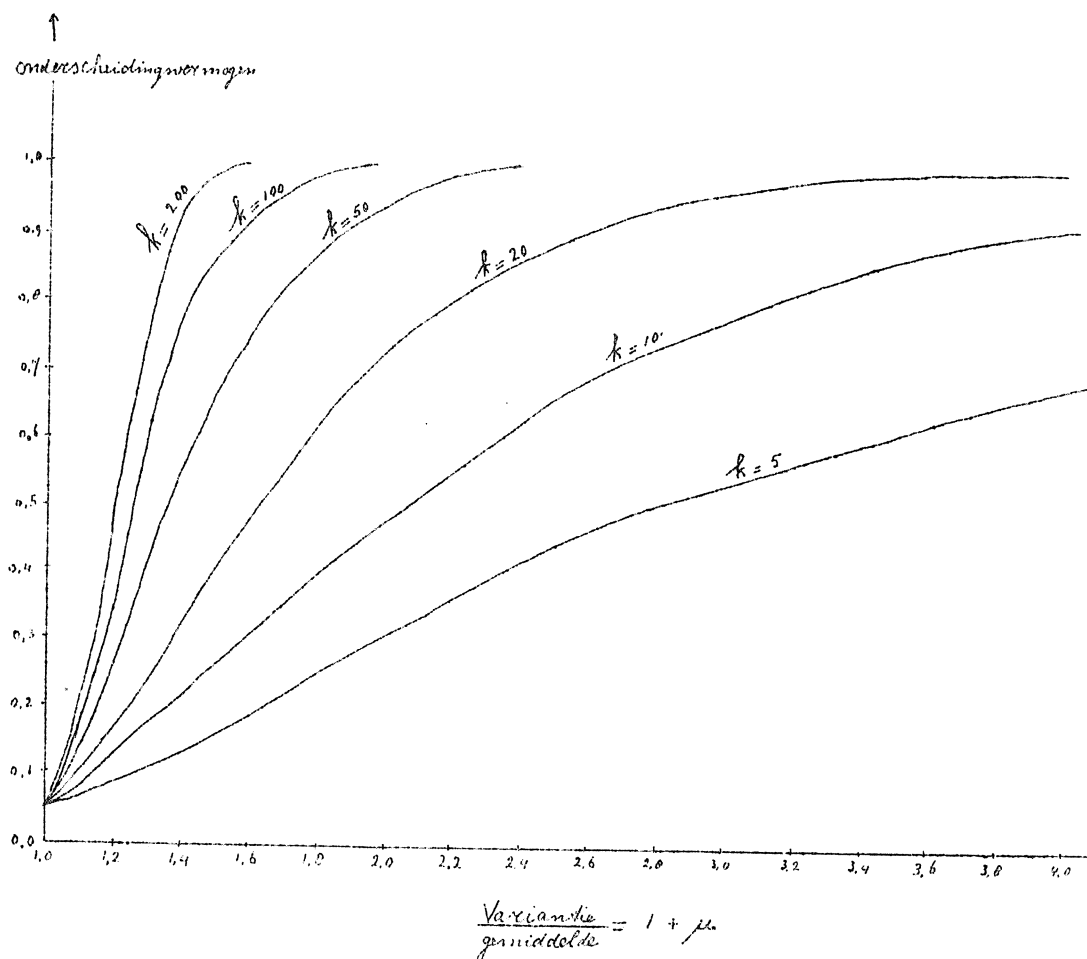
(2.17)

De rechterleden van (2.17) zijn juist de eerste 4 momenten van  $(1+\mu) \chi^2$ , waarbij  $\chi^2$  ( $k-1$ ) vrijheidsgraden bezit.  $\underline{z}_{n,1}$  zal dus

in het geval van een dubbele Poissonverdeling voor grote  $\lambda\mu$  bij benadering verdeeld zijn als  $(1+\mu) \chi^2_{(k-1)}$ . Het is nu dus mogelijk om, bij een gegeven onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha$ , het onderscheidingsvermogen te benaderen van deze toets, met als getoetste hypothese de hypothese, dat de waarnemingen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) uit een Poissonverdeling komen, en als alternatief, dat de  $x_i$  afkomstig zijn uit een dubbele Poissonverdeling. Dit onderscheidingsvermogen zal, zoals uit het wegvallen van  $\lambda$  in (2.17) blijkt, uitsluitend afhangen van  $\mu$ , en natuurlijk van  $k$ , de uitgebreidheid van de steekproef. In grafiek 2.2 is voor  $\alpha = 0,05$  en voor verschillende waarden van  $k$  het onderscheidend vermogen als functie van  $1+\mu$  weergegeven.

Grafiek 2.2

Het onderscheidingsvermogen van  $\sum_{i=1}^k x_i$  met een dubbele Poissonverdeling als alternatieve hypothese.



KATHIRGAMATAMBY [14] heeft langs een andere weg (zie par. 1.5) het onderscheidingsvermogen uitgerekend voor de gevallen  $k = 51, 101$ ;  $\lambda = 1, 5, 10$ ;  $\mu = 0,5$  en  $1$  en een kritiek gebied met onbetrouwbaarheid  $0,05$ . De benadering van KATHIRGAMATAMBY is zeker nauwkeuriger dan de  $(1+\mu) \chi^2$ -benadering. Voor de gevallen, die KATHIRGAMATAMBY berekende, bleek het onderscheidingsvermogen steeds iets groter dan door BATEMAN berekend is. Verder bleek voor deze gevallen het type van samengestelde Poissonverdeling (zie par. 2.4), dat als alternatief beschouwd werd, van geringe invloed op het onderscheidingsvermogen, dat vrijwel uitsluitend afhangt van  $\frac{\sigma^2\{x\}}{E x}$ .

Met behulp van het onderscheidingsvermogen is het nu gemakkelijk om de minimale grootte van de steekproef te bepalen bij een bepaald alternatief, dus een bepaalde waarde van  $k$ , zodat een voldoende groot onderscheidingsvermogen wordt verkregen.

G.J.BATEMAN heeft, om een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering, voor verschillende waarden van  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $k$  de verhoudingen  $R_1, R_2, R_3$  en  $R_4$  van de eerste 4 momenten van  $\underline{z}_{n,1}$  en die van  $(1+\mu) \chi^2$  berekend. Enige resultaten daarvan zijn in tabel 2.3 vervat. Uit deze tabel blijkt, dat steeds de eerste beide momenten van  $\underline{z}_{n,1}$  zeer weinig verschillen van die van  $(1+\mu) \chi^2$ .  $R_3$  verschilt voor kleine waarden van  $\lambda\mu$  echter aanmerkelijk van 1. Voor  $\lambda\mu \geq 10$  is de  $\chi^2$ -benadering in het algemeen voldoende nauwkeurig.

Tabel 2.3

De verhoudingen  $R_1, R_2, R_3$  en  $R_4$  voor de eerste 4 momenten van  $\underline{z}_{n,1}$  en  $(1+\mu) \chi^2$ , waarin  $\chi^2(k-1)$  vrijheidsgraden heeft.

| $\mu$ | $k$ | $\lambda\mu = 5$ |        |        |        | $\lambda\mu = 20$ |        |        |        |
|-------|-----|------------------|--------|--------|--------|-------------------|--------|--------|--------|
|       |     | $R_1$            | $R_2$  | $R_3$  | $R_4$  | $R_1$             | $R_2$  | $R_3$  | $R_4$  |
| 0,5   | 5   | 0,9864           | 0,932  | 0,92   | 1,40   | 0,9966            | 0,983  | 0,99   | 1,09   |
|       | 10  | 0,9933           | 0,993  | 1,15   | 1,35   | 0,9983            | 0,998  | 1,04   | 1,08   |
|       | 50  | 0,9987           | 1,043  | 1,35   | 1,18   | 0,9997            | 1,011  | 1,09   | 1,04   |
|       | 1   |                  | 1,0556 | 1,3969 | 1,1142 | 1                 | 1,0139 | 1,0981 | 1,0280 |
| 1,0   | 5   | 0,9792           | 0,903  | 0,87   | 1,57   | 0,9949            | 0,975  | 0,98   | 1,12   |
|       | 20  | 0,9949           | 1,031  | 1,36   | 1,37   | 0,9987            | 1,008  | 1,10   | 1,08   |
|       | 100 | 0,9990           | 1,066  | 1,51   | 1,21   | 0,9998            | 1,017  | 1,13   | 1,05   |
|       | 1   |                  | 1,0750 | 1,5456 | 1,556  | 1                 | 1,0188 | 1,1349 | 1,0379 |

Opmerking:

De dispersie-index  $\underline{z}_{n,1}$  is nu ook te gebruiken om de nulhypothese te toetsen, dat de waarnemingen komen uit een dubbele Poissonverdeling met  $\mu = \mu_0$ , waarin  $\mu_0$  een gegeven waarde van  $\mu$  voorstelt. Analoge redenering als in par. 2.2 gebruikt, leidt dan tot de uitspraak dat deze toets asymptotisch onderscheidend is voor een alternatief  $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$  en als  $\mu_1 > \mu_0$  resp  $\mu_1 < \mu_0$ , ook voor de klasse van alternatieven  $\mu > \mu_0$  respectievelijk  $\mu < \mu_0$ .

2.4. Enkele belangrijke discrete verdelingen als bijzondere gevallen van de samengestelde Poissonverdeling.

In par. 2.3 hebben wij de dubbele Poissonverdeling als een speciaal type van een samengestelde Poissonverdeling leren kennen. Wij beschouwden daar verder alleen het geval, dat  $\mu$  een discrete grootte is, d.w.z. hoogstens aftelbaar veel waarden aanneemt.

Algemener wordt nu gedefinieerd:

$\underline{x}$  bezit een samengestelde Poissonverdeling als geldt:

$$(2.18) \quad P[\underline{x} = x] = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} dF(\mu). \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

Hierbij is  $F(\mu)$  de verdelingsfunctie van  $\mu$ . De integraal in (2.18) moet in de zin van een Stieltjes-integraal opgevat worden. Is  $F(\mu)$  een stapfunctie, dus  $\mu$  discreet, dan gaat (2.18) over in (2.14). De naam "samengestelde Poissonverdeling" is afkomstig van GREENWOOD en YULE [39]. In tegenstelling hiermee noemt men de "gewone" Poissonverdeling dan wel enkelvoudig. Wij tonen nu eerst een paar belangrijke eigenschappen van de samengestelde Poissonverdeling aan, waaruit volgt, dat de toetsen in het vorige hoofdstuk beschreven, in het algemeen asymptotisch onderscheidend zullen zijn voor het alternatief van dit type verdelingen. Daarna laten wij zien, dat enkele belangrijke verdelingen, door een speciale keuze voor  $F(\mu)$ , als bijzondere gevallen van samengestelde Poissonverdelingen beschouwd kunnen worden. De bovengenoemde toetsen zullen dan dus ook asymptotisch onderscheidend zijn voor deze discrete verdelingen als alternatief.

Wij merkten reeds op, dat voor de dubbele Poissonverdeling geldt:  $\frac{\text{Var } \underline{x}}{\mathbb{E} \underline{x}} = 1 + \mu > 1$ . Dit blijkt nu een eigenschap van de samengestelde Poissonverdeling in het algemeen te zijn. Want nu geldt:

$$\mathbb{E} \underline{x} = \mathbb{E} \mu ; \quad \text{Var } \underline{x} = \text{Var } \mu + \mathbb{E} \mu$$



dus

$$(2.19) \quad \frac{\text{Var } \underline{x}}{\mathbb{E} \underline{x}} = 1 + \frac{\text{Var } \underline{\mu}}{\mathbb{E} \underline{\mu}} > 1$$

Het bewijs hiervan is als volgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \underline{x} &= \sum_{x=0}^{\infty} x \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} dF(\mu) \\ (2.20) \quad &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \right\} dF(\mu) \\ &= \int_0^{\infty} \mu dF(\mu) = \mathbb{E} \underline{\mu} \end{aligned}$$

evenzo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \underline{x}^2 &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \right\} dF(\mu) \\ &= \int_0^{\infty} \mu(\mu+1) dF(\mu) \\ &= \mathbb{E} \underline{\mu}^2 + \mathbb{E} \underline{\mu} \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \text{Var. } \underline{x} &= \mathbb{E} \underline{x}^2 - (\mathbb{E} \underline{x})^2 \\ (2.21) \quad &= \mathbb{E} \underline{\mu}^2 + \mathbb{E} \underline{\mu} - (\mathbb{E} \underline{\mu})^2 \\ &= \text{Var. } \underline{\mu} + \mathbb{E} \underline{\mu} \end{aligned}$$

Uit (2.20) en (2.21) volgt (2.19).

Is  $\text{Var } \underline{\mu} \neq 0$ , dan is dus volgens par. 2.2 de toets met  $\underline{z}_{n,1}$  als toetsingsgrootheid asymptotisch onderscheidend voor deze alternatieven.

Wij leiden nu nog een tweede eigenschap af die betrekking heeft op het aantal nullen onder de waarnemingen. Het blijkt, dat in vergelijking met een enkelvoudige Poissonverdeling met hetzelfde gemiddelde, de waarnemingen uit een samengestelde Poissonverdeling relatief een groter aantal nullen bevatten ;

$$P[\underline{x} = 0] = \int_0^{\infty} e^{-\mu} dF(\mu) =$$

$$(2.22) \quad = e^{-\xi_x} \int_0^{\infty} e^{\xi_x - \mu} dF(\mu) \\ > e^{-\xi_x} \int_0^{\infty} \{1 + (\xi_x - \mu)\} dF(\mu) = e^{-\xi_x}$$

$e^{-\xi_x}$  is de kans, dat  $x=0$  is, wanneer  $x$  uit een enkelvoudige Poissonverdeling komt met parameter  $\xi_x$ ; hier is  $\xi_x$  de verwachting van  $x$  als  $x$  uit een samengestelde Poissonverdeling komt. De kans, dat  $x=0$  is, is dus groter in het geval van een samengestelde Poissonverdeling dan wanneer het een enkelvoudige Poissonverdeling betreft met hetzelfde gemiddelde.

In par. 1.4 werd een toets beschreven met als toetsingsgrootte het aantal nullen onder de waarnemingen. Waarnemingen met een relatief groot aantal nullen werden hierbij tot de kritieke zone gerekend. Uit het bovenstaande volgt nu, dat ook deze toets asymptotisch onderscheidend zal zijn voor het alternatief van een samengestelde Poissonverdeling.

Wij gaan nu over tot de bespreking van enkele belangrijke discrete verdelingen, die als bijzondere gevallen van de samengestelde Poissonverdeling te beschouwen zijn. Eén van deze verdelingen, de dubbele Poissonverdeling is al in de vorige paragraaf besproken. Deze dubbele Poissonverdeling werd verkregen door voor  $F(\mu)$  een Poissonverdeling te nemen. Wij beschouwen nu nog enkele andere speciale gevallen. In de eerste plaats:

$$(2.23) \quad F(\mu) = \int_0^{\mu} \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \mu^{r-1} e^{-\alpha\mu} d\mu$$

Deze verdeling van  $\mu$  staat bekend onder de naam: verdeling van PEARSON, type III. (Pearson's systeem van verdelingen [40]). Voor de verdeling van  $x$  krijgen wij nu:

$$(2.24) \quad P[x=x] = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \cdot \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \mu^{r-1} e^{-\alpha\mu} d\mu =$$

$$= \binom{x+r-1}{x} \left( \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^r \left( \frac{1}{1+\alpha} \right)^x$$

Schrijven wij voor  $\frac{\alpha}{1+\alpha}$  nog  $p$  en voor  $\frac{1}{1+\alpha}$   $q$ , dan wordt (2.24):

$$(2.25) \quad P[x=x] = \binom{x+r-1}{x} p^r q^x$$

In (2.25) komen evenals in de dubbele Poissonverdeling twee para-

meters, nl.  $\gamma$  en  $p$  voor. (2.25) kan geïnterpreteerd worden als de kans, dat bij een binomiale verdeling met kansen  $p$  en  $q$  het  $\gamma^{\text{de}}$  "succes" plaats vindt bij de  $(x+\gamma)^{\text{de}}$  proef; anders gezegd de kans, dat er  $x$  mislukkingen plaatsvinden, voordat het  $\gamma^{\text{de}}$  succes optreedt. Deze verdeling staat in de literatuur bekend onder de namen: PASCAL-verdeling en negatieve binomiale verdeling.

Een andere belangrijke discrete verdeling in dit verband is de POLYA-EGGENBERGER-verdeling [41, 42, 43]. Deze verdeling wordt gegeven door:

$$P[\underline{x} = x] =$$

(2.26)

$$\binom{n}{x} \frac{p(p+\gamma) \dots (p+x\gamma-\gamma) q(q+\gamma) \dots (q+n\gamma-x\gamma-\gamma)}{1(1+\gamma)(1+2\gamma) \dots (1+n\gamma-\gamma)}$$

Deze verdeling bevat 3 parameters nl.  $n$ ,  $p$  en  $\gamma$ . Het volgende model leidt tot deze verdeling. Beschouw een bak met in totaal  $N$  voorwerpen van 2 soorten: A en B. Laat de fractie met kenmerk A van het totale aantal voorwerpen  $p$  bedragen. Er worden nu  $n$  trekkingen met teruglegging uitgevoerd en wel zo, dat wanneer een bepaalde trekking een voorwerp A oplevert er aan de bak  $\gamma N$  voorwerpen A worden toegevoegd; is het getrokken voorwerp een B, dan worden er evenzo  $\gamma N$  voorwerpen B aan de bak toegevoegd. Zijn in de eerste  $n'$  trekkingen  $x$  A's en  $n'-x$  B's getrokken, dan zijn de voorwaardelijke kansen, dat in de  $(n'+1)^{\text{de}}$  trekking een A resp. een B getrokken wordt dus:

$$(2.27) \quad \frac{p+x\gamma}{1+n'\gamma} \quad \text{resp.} \quad \frac{q+(n'-x)\gamma}{1+n'\gamma}$$

Uit (2.27) volgt nu onmiddellijk (2.26). (2.26) is dus nu de kans, dat in de eerste  $n$  trekkingen  $x$  voorwerpen met kenmerk A voorkomen. Het zojuist beschreven waarschijnlijkheidsmodel, dat tot (2.26) leidt, is oorspronkelijk door POLYA, EGGENBERGER etc. opgesteld voor de analyse en beschrijving van besmettingsverschijnselen. Bij deze verschijnselen vergroot het optreden van een bepaalde gebeurtenis de kans, dat deze gebeurtenis nog eens optreedt.

Voor (2.26) kan nu een belangrijke asymptotische verdeling afgeleid worden. Voor  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow 0$  en wel zó, dat  $np \rightarrow \lambda$  en  $n\gamma \rightarrow \rho^{-1}$  gaat (2.26) over in:

$$(2.28) \quad P[\underline{x} = x] = \binom{\lambda \rho^{-1} + x - 1}{x} \left( \frac{\rho}{1+\rho} \right)^{\lambda \rho} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^x$$

Vergelijking van (2.23) met (2.24) doet zien, dat deze asymptotische verdeling een PASCAL-verdeling (negatieve binomiale verdeling) is. De analogie met de asymptotische overgang van een binomiale verdeling in een Poissonverdeling is duidelijk.

(2.28) wordt ook vaak een POLYA-verdeling genoemd. De verwachting en variantie van  $x$  in het geval van een PASCAL-verdeling zijn eenvoudig met behulp van (2.19) te vinden. Wij krijgen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} x &= \mathcal{E} \mu = \int_0^{\infty} \mu \frac{\alpha^x}{\Gamma(x)} \mu^{x-1} e^{-\alpha \mu} d\mu = \\ (2.29) \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(x+1)}{\alpha^{x+1} \Gamma(x)} = \frac{x}{\alpha} = \frac{x \rho}{p}$$

$$\begin{aligned} \text{Var } x &= \text{Var } \mu + \mathcal{E} \mu = \mathcal{E} \mu^2 - (\mathcal{E} \mu)^2 + \mathcal{E} \mu = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mu^2 \alpha^x}{\Gamma(x)} \mu^{x-1} e^{-\alpha \mu} d\mu - (\mathcal{E} \mu)^2 + \mathcal{E} \mu = \\ (2.30) \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(x+2)}{\alpha^{x+2} \Gamma(x)} - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{x}{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{(x+1)x}{\alpha^2} = \frac{x(1+\alpha)}{\alpha^2} = \frac{x \rho}{p^2}$$

Uit (2.29) en (2.30) volgt dan:

$$(2.31) \quad \frac{\text{Var } x}{\mathcal{E} x} = \frac{x \rho}{p^2} : \frac{x \rho}{p} = \frac{1}{p} > 1$$

Deze verhouding is dus uitsluitend afhankelijk van  $p$ , of wat op hetzelfde neerkomt van  $\alpha$ . Het onderscheidingsvermogen zal dus ook grotendeels bepaald worden door de waarde van  $p$  of  $\alpha$  en niet zozeer door  $x$ . In (2.28) stemt  $\rho$  overeen met  $\alpha$  en  $\lambda \rho$  met  $x$ . De verhouding  $\frac{\text{Var } x}{\mathcal{E} x}$  is dus voor een POLYA-verdeling onafhankelijk van  $\lambda$ . Dit is weer een analogie met de Poisson-verdeling. Het onderscheidingsvermogen zal groot zijn voor kleine waarden van  $p$ ; in het geval van de POLYA-verdeling dus voor kleine waarden van  $\rho$ .  $\frac{1}{p}$  is een maat voor de besmetting; het onderscheidingsvermogen, zoals te verwachten neemt toe met de graad van de besmetting. Voor verdere bijzonderheden betreffende de PASCAL-verdeling en toepassingen er van, verwijzen wij naar [44] en [45].

Nog een paar andere speciale gevallen van  $F(\mu)$  zijn o.a.:  $\log \mu$  bezit een normale verdeling, d.w.z.:

$$(2.32) \quad F(\mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^\mu \frac{1}{\mu-a} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{\log(\mu-a) - m\}^2} d\mu$$

De verdeling van  $\underline{x}$  is dan:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} P[\underline{x} = x] &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^\infty \frac{e^{-\mu}}{x!} \frac{\mu^x}{(\mu-a)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{\log(\mu-a) - m\}^2} d\mu = \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x!} \int_a^\infty \frac{\mu^x}{\mu-a} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{\log(\mu-a) - m\}^2 - \mu} d\mu \end{aligned}$$

Deze verdeling werd beschouwd door PRESTON [46] en GRUNDY [47]. Verder:

$\sqrt{\mu}$  bezit een Pearsonverdeling type III. Deze verdeling is afkomstig van R.A.FISHER, en wordt daarom wel aangegeven met FISHER's  $H^p$ -verdeling [44].

Wij beperken ons tot deze voorbeelden van samengestelde Poissonverdelingen. De literatuur over samengestelde Poissonverdelingen is zeer uitgebreid. Wij verwijzen hiervoor verder naar de literatuuropgaven. Hetzelfde geldt voor de theorie van de gegeneraliseerde Poissonverdeling ([49] - [51]).

De inhoud van deze paragraaf is voor een groot deel ontleend aan [48]. In [1] zijn veel belangrijke opmerkingen over deze stof vervat op de pagina's 83, 128, 174, 181, 188, 210, 217, 218, 221, 233, 237, 297, 295.

### HOOFDSTUK 3

#### Schattingen en betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter van een Poissonverdeling.

##### 3.1. Schattingen voor de parameter $\mu$ van een Poissonverdeling.

In par. 1.4 zagen wij, dat de simultane verdelingsfunctie van de waarnemingen  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), wanneer de  $x_i$  alle uit eenzelfde Poissonverdeling komen, onder de voorwaarde  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^m x_i$ , onafhankelijk is van de waarde van de parameter  $\mu$ . Het volgende bleek nl. vergelijk (1.3) en (1.9):

$$\begin{aligned} P[x_i = x_i \ (i=1, 2, \dots, n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^m x_i] = \\ = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)!}{\prod_{i=1}^n (x_i!)} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^{x_i} \end{aligned}$$

Door deze eigenschap was het mogelijk om voor het toetsen van de hypothese, dat de  $x_i$  uit een Poissonverdeling komen, "similar critical regions" [14] te vinden. Deze eigenschap is nu ook in een ander opzicht van belang; deze impliceert nl. het volgende. Nemen wij als schatting voor  $\mu$ :

$$(3.1) \quad \underline{m}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

dan blijkt deze schatting de eigenschap te bezitten, dat voor elke andere schatting  $\underline{m}$ , de voorwaardelijke verdelingsfunctie  $F(\underline{m} \mid \underline{m}_1 = m_1)$  onafhankelijk van  $\mu$  is.

Schattingen, die deze eigenschap bezitten, zijn boven elke andere schatting te verkiezen. In de Angelsaksische literatuur wordt deze eigenschap met "sufficiency" aangeduid.  $m_1$  is dan een "sufficient estimate" (17) van  $\mu$ . De bijzondere waarde van een "sufficient estimate" ligt daarin, dat zij alle informatie, die de steekproef bevat benut; of in de terminologie van R.A. FISHER: "a sufficient estimate exhausts the information contained in the sample".

De schatting  $m_1$  voor  $\mu$  bezit nog andere belangrijke eigenschappen. In de eerste plaats is  $m_1$  een zuivere schatting (18) (unbiased estimate). Hiermee wordt bedoeld, dat de verwachting van  $\underline{m}_1$  gelijk aan  $\mu$  is. Deze eigenschap volgt uit:

$$(3.2) \quad \mathcal{E}(\underline{m}_1) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{E}(x_i) = \frac{1}{n} n \mu = \mu$$

Verder is  $\underline{m}$ , de meest aannemelijke schatting (13) voor  $\mu$  (maximum likelihood estimate). Dat wil zeggen, dat voor een gegeven groep waarnemingen  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ )  $m$ , die waarde van de parameter  $\mu$  is, waarvoor  $P[\underline{x}_i = x_i (i=1, \dots, n); \mu]$  als functie van  $\mu$  zo groot mogelijk is. Dat  $\underline{m}$ , deze eigenschap bezit, blijkt als volgt.

$$\begin{aligned} \log P[\underline{x}_i = x_i (i=1, 2, \dots, n); \mu] &= \\ &= -n\mu + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \log \mu - \sum_{i=1}^n \log(x_i!) \end{aligned}$$

Differentiatie naar  $\mu$  geeft verder:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log P[\underline{x}_i = x_i (i=1, 2, \dots, n); \mu]}{\partial \mu} &= \\ &= -n + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Het maximum van  $P[\underline{x}_i = x_i (i=1, \dots, n); \mu]$  als functie van  $\mu$  wordt dus verkregen voor:

$$(3.3) \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = m,$$

$m$  is dus inderdaad de meest aannemelijke schatting voor  $\mu$ . Het is nu bekend, dat dit type schattingen onder zeer algemene voorwaarden, zie hiervoor [29, 52], verschillende belangrijke eigenschappen bezit. Daar deze voorwaarden in ons geval vervuld zijn, geldt voor  $m$ , ondermeer: dat  $\sqrt{n}(m - \mu)$  asymptotisch normaal verdeeld is met verwachting (gemiddelde) 0 en variantie (spreidingskwadraat)  $\sigma^2 = \mu$ . Verder geldt voor elke andere schatting  $\hat{m}$  van  $\mu$  met de eigenschap, dat  $\sqrt{n}(\hat{m} - \mu)$  asymptotisch normaal verdeeld is, dat de variantie  $\sigma^2 > \sigma^2 = \mu$  is. Men spreekt in dit geval van een "meest doeltreffende schatting" van  $\mu$  ("efficient estimate") (19). De eigenschap het meest doeltreffend te zijn impliceert, dat  $\text{Var}(\underline{m}) \rightarrow 0$  gaat voor  $n \rightarrow \infty$ . Immers  $\text{Var}(\sqrt{n}(\underline{m} - \mu)) \rightarrow \mu$  voor  $n \rightarrow \infty$ , dus  $\text{Var}(\underline{m} - \mu) = \frac{1}{n} \text{Var}(\sqrt{n}(\underline{m} - \mu)) \rightarrow 0$  voor  $n \rightarrow \infty$ . Men zegt nu, dat  $m$ , een bruikbare schatting van  $\mu$  is ("consistent estimate") (20). Uit al deze eigenschappen van  $m$ , volgt nu wel, dat deze schatting aan praktisch alle eisen die aan een schatting te stellen zijn voldoet.

$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  is daarom en mede vanwege de eenvoudige berekening

in de regel boven elke andere schatting van  $\mu$  te verkiezen. Wel wordt nog even opgemerkt, dat  $m$ , niet een mediaan-zuivere schatting van  $\mu$  is; d.w.z.  $P[m, \geq \mu] \neq P[m, \leq \mu]$ . Dit houdt verband met het feit, dat de verdeling van de  $x_i$  niet symmetrisch is. Zij is natuurlijk wel asymptotisch mediaan-zuiver.

Een tweede schatting,  $m_2$ , van  $\mu$  berust op een "kleinste vierkantenmethode". Laat  $n_x$  de frequentie van het aantal  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) zijn, die de waarde  $x$  aannemen.  $n_x$ , zonder onderstreping, dus het werkelijk waargenomen aantal  $x_i$  met de waarde  $x$ . Er geldt dus  $\sum_x n_x = n$ .

Wij hebben nu:

$$(3.4) \quad \mathcal{E}(n_x) = \frac{n \mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

en

$$(3.5) \quad \mathcal{E}(n_{x+1}) = \frac{\mu}{x+1} \mathcal{E}(n_x)$$

Stel nu naar aanleiding van (3.5)

$$(3.6) \quad n_{x+1} = \frac{\mu}{x+1} n_x + \varepsilon_x$$

Een schatting voor  $\mu$  wordt nu gevonden door  $\sum_x \varepsilon_x^2$  te minimaliseren.

$$(3.7) \quad \sum_x \varepsilon_x^2 = \sum_x \left[ n_{x+1} - \frac{\mu}{x+1} n_x \right]^2$$

Differentiatie naar  $\mu$  en gelijkstelling aan nul geeft:

$$\sum_x \left[ n_{x+1} - \frac{\mu}{x+1} n_x \right] \frac{n_x}{x+1} = 0$$

waaruit volgt:

$$(3.8) \quad m_2 = \frac{\sum_x \left[ \frac{n_x \cdot n_{x+1}}{x+1} \right]}{\sum_x \left[ \frac{n_x^2}{(x+1)^2} \right]}$$

Deze schatting  $m_2$  van  $\mu$  is kruikbaar. Er geldt nl.:

$$\frac{\mathcal{E} \sum_x \left[ \frac{n_x \cdot n_{x+1}}{x+1} \right]}{\mathcal{E} \sum_x \left[ \frac{n_x^2}{(x+1)^2} \right]} = \frac{\sum_x \frac{\mu^{2x+1}}{(x+1)!^2}}{\sum_x \frac{\mu^{2x}}{(x+1)!^2}} = \mu,$$

en voor teller en noemer gaat de spreiding naar 0 voor  $n \rightarrow \infty$



Definiëren wij als de relatieve doeltreffendheid van  $m_2$  ten opzichte van  $m_1$ :

$$(3.9) \quad D_{rel.} = \frac{Var(m_1)}{Var(m_2)}$$

dan laat een numerieke berekening zien, dat geldt:

Tabel 3.1

Relatieve doeltreffendheid:  $D_{rel} = \frac{Var(m_1)}{Var(m_2)}$

| $\mu$      | 0,0 | 0,5    | 1,0    | 1,5    | 2,0    | 3,0    | 4,0    | 5,0    | 10,0   | $\infty$ |
|------------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| $D_{rel.}$ | 1   | 0,4929 | 0,3617 | 0,3182 | 0,3542 | 0,4481 | 0,5215 | 0,5583 | 0,5910 | 0,6495   |

Verder wordt nog opgemerkt, dat  $m_2$  niet het karakter van "sufficiency" bezit (zie [53]).

Als derde schatting geven wij ten slotte nog een bekende schatting die berust op het aantal nullen onder de waarnemingen. Het aantal nullen onder de  $n$  waarnemingen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) is een stochastische grootte  $\underline{h}$ .  $\underline{h}$  bezit een binomiale verdeling met kansen  $p = e^{-\mu}$  en  $q = 1 - e^{-\mu}$ . Dus:

$$(3.10) \quad P[\underline{h} = h] = \binom{n}{h} (e^{-\mu})^h (1 - e^{-\mu})^{n-h}$$

In plaats van  $\mu$  rechtstreeks te schatten, schat men in eerste instantie  $p = e^{-\mu}$ .  $\frac{\underline{h}}{n}$  is, zoals gemakkelijk is na te gaan, een meest aannemelijke en dientengevolge een meest doeltreffende schatting voor  $p = e^{-\mu}$ ;  $m_3 = -\log \frac{\underline{h}}{n}$  is nu een schatting voor  $\mu$ . Daar deze schatting slechts gebruik maakt van het aantal nullen onder de waarnemingen, zal deze schatting tenachter staan bij  $m_1$  en  $m_2$ . Voor verdere bijzonderheden in verband met deze schatting verwijzen wij naar [23].

### 3.2. Betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter $\mu$ van de Poissonverdeling.

Een éénzijdig naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval met een onbetrouwbaarheid  $\alpha$ , gebaseerd op één enkele waarneming  $x$  kan als volgt bepaald worden.

$P[\underline{x} \geq x; \mu] = f_1(\mu)$  is een monotoon stijgende functie van  $\mu$ . Bepalen wij van de grootste waarde  $\mu_1$  van  $\mu$ , waarvoor nog juist geldt:

$$P[\underline{x} \geq x; \mu_1] = f_1(\mu_1) \leq \alpha$$

dan is  $\mu_1 \leq \mu \leq \infty$  een éézijdig, naar beneden begrensd, betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu$  met een onbetrouwbaarheid  $\leq \alpha$ . De kans, dat het geconstrueerde interval de werkelijke waarde van de parameter  $\mu$  zal bevatten is  $\geq 1 - \alpha$ .

Op analoge wijze kan men een naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu$  bepalen.  $P[\underline{x} \leq x; \mu] = f_2'(\mu)$  is een monotoon dalende functie van  $\mu$ . Wordt nu de kleinste waarde  $\mu_2$  van  $\mu$  bepaald, waarvoor nog juist geldt:  $P[\underline{x} \leq x; \mu_2] = f_2'(\mu_2) \leq \alpha$ , dan is  $0 \leq \mu \leq \mu_2$  een éézijdig naar boven begrensd betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid  $\leq \alpha$ .

$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$  is, zoals duidelijk is, een tweezijdig begrensd betrouwbaarheidsinterval met een onbetrouwbaarheid  $\leq 2\alpha$ .

Beschikken wij over  $n$  waarnemingen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), dan is de situatie in wezen precies dezelfde. Immers  $\sum_{i=1}^n x_i$  bezit nu een Poissonverdeling met parameter  $n\mu$  (6). Wij bepalen nu eerst een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  voor  $n\mu$ . Vinden wij hiervoor het interval  $(\mu_1', \mu_2')$ , dan is  $(\frac{\mu_1'}{n}, \frac{\mu_2'}{n}) = (\mu_1, \mu_2)$  een betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu$  en wel met dezelfde onbetrouwbaarheid.

De grenzen  $\mu_1$  en  $\mu_2$  kunnen met behulp van een tafel voor de gecumuleerde termen van een Poissonreeks bepaald worden; zoals b.v. de tafel van E.C.MOLINA [10]. Ook de tafel van H.O.HARTLEY and E.S.PEARSON, zie [11], is voor dit doel handig. Beschikt men niet over een tafel voor de gecumuleerde termen van een Poissonreeks, dan kan men voor dit doel ook gebruik maken van een tabel voor de  $\chi^2$ -verdeling. Deze toepassing van de tabel voor de  $\chi^2$ -verdeling berust op de bekende betrekking:

$$\begin{aligned} P[\underline{x} \leq x; \mu] &= e^{-\mu} \sum_{r=0}^x \frac{\mu^r}{r!} = \\ (3.11) \quad &= \int_{\mu}^{\infty} e^{-t} \frac{t^x}{x!} dt \end{aligned}$$

De juistheid van deze betrekking tussen de som van de eerste  $x$  termen van de Poissonreeks en de onvolledige  $\Gamma$ -functie blijkt direct door het tweede en derde lid van (3.11) naar  $\mu$  te differentiëren.

Verder geldt:

$$(3.12) \quad \int_{\mu}^{\infty} e^{-t} \frac{t^x}{x!} dt = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{(\frac{n-2}{2})!} \int_{2\mu}^{\infty} e^{-\frac{t'}{2}} t'^{\frac{n-2}{2}} dt'$$

met  $n = 2x + 2$ .

Dus is  $P[\underline{x} \leq x; \mu] = P[\chi^2_n \geq 2\mu]$

waarbij  $\chi^2_n$  verdeeld is als  $\chi^2$  met  $n = 2x + 2$  vrijheidsgraden.

Een ééNZijdig naar beneden begrensde betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha$  bij een gegeven waarneming  $x$  vinden wij dus door  $\mu$ , te bepalen uit:

$$P[\underline{x} \geq x; \mu] = \alpha$$

of

$$(3.13) \quad P[\underline{x} \leq x-1; \mu] = P[\chi^2_{(2x)} \geq 2\mu] = 1 - \alpha$$

Het gezochte betrouwbaarheidsinterval is dan:  $\mu_1 \leq \mu \leq \infty$ .

Een ééNZijdig naar boven begrensde interval met drempel  $\alpha$  vinden wij op analoge wijze uit:

$$(3.14) \quad P[\underline{x} \leq x; \mu_2] = P[\chi^2_{(2x+2)} \geq 2\mu_2] = \alpha$$

$0 \leq \mu \leq \mu_2$  is nu het gezochte interval.  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$  is dan verder een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval met drempel  $2\alpha$ .

Opgemerkt wordt nog, dat de tabel van H.O.HARTLEY and E.S.PEARSON een combinatie is van een tabel voor de  $\chi^2$ -verdeling en de sommen voor de eerste termen van een Poissonreeks. De mogelijkheid hiervoor volgt uit (3.11) en (3.12).

Voor het geval, dat ook geen  $\chi^2$ -tabel beschikbaar is, worden hier nog twee tabellen gegeven en wel voor tweezijdig begrensde betrouwbaarheidsintervallen en voor ééNZijdig naar boven begrensde intervallen voor verschillende waarden van  $\alpha$ , de drempelwaarde. Deze tabellen zijn resp. ontleend aan [54] en [55].

Tabel 3.2

Tweezijdig begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor  $\mu$ .

| $\mu$ | betrouwbaarheidscoëfficiënt |             |            |             | $\mu$ | betrouwbaarheidscoëfficiënt |             |            |             |
|-------|-----------------------------|-------------|------------|-------------|-------|-----------------------------|-------------|------------|-------------|
|       | 0,99                        |             | 0,95       |             |       | 0,99                        |             | 0,95       |             |
|       | ben.-grens                  | boven-grens | ben.-grens | boven-grens |       | ben.-grens                  | boven-grens | ben.-grens | boven-grens |
| 0     | 0,0                         | 5,3         | 0,0        | 3,7         |       |                             |             |            |             |
| 1     | 0,0                         | 7,4         | 0,1        | 5,6         | 26    | 14,7                        | 42,2        | 17,0       | 38,0        |
| 2     | 0,1                         | 9,3         | 0,2        | 7,2         | 27    | 15,4                        | 43,5        | 17,8       | 39,2        |
| 3     | 0,3                         | 11,0        | 0,6        | 8,8         | 28    | 16,2                        | 44,8        | 18,6       | 40,4        |
| 4     | 0,6                         | 12,6        | 1,0        | 10,2        | 29    | 17,0                        | 46,0        | 19,4       | 41,6        |
| 5     | 1,0                         | 14,1        | 1,6        | 11,7        | 30    | 17,7                        | 47,2        | 20,2       | 42,8        |
| 6     | 1,5                         | 15,6        | 2,2        | 13,1        | 31    | 18,5                        | 48,4        | 21,0       | 44,0        |
| 7     | 2,0                         | 17,1        | 2,8        | 14,4        | 32    | 19,3                        | 49,6        | 21,8       | 45,1        |
| 8     | 2,5                         | 18,5        | 3,4        | 15,8        | 33    | 20,0                        | 50,8        | 22,7       | 46,3        |
| 9     | 3,1                         | 20,0        | 4,0        | 17,1        | 34    | 20,8                        | 52,1        | 23,5       | 47,5        |
| 10    | 3,7                         | 21,3        | 4,7        | 18,4        | 35    | 21,6                        | 53,3        | 24,3       | 48,7        |
| 11    | 4,3                         | 22,6        | 5,4        | 19,7        | 36    | 22,4                        | 54,5        | 25,1       | 49,8        |
| 12    | 4,9                         | 24,0        | 6,2        | 21,0        | 37    | 23,2                        | 55,7        | 26,0       | 51,0        |
| 13    | 5,5                         | 25,4        | 6,9        | 22,3        | 38    | 24,0                        | 56,9        | 26,8       | 52,2        |
| 14    | 6,2                         | 26,7        | 7,7        | 23,5        | 39    | 24,8                        | 58,1        | 27,7       | 53,3        |
| 15    | 6,8                         | 28,1        | 8,4        | 24,8        | 40    | 25,6                        | 59,3        | 28,6       | 54,5        |
| 16    | 7,5                         | 29,4        | 9,2        | 26,0        | 41    | 26,4                        | 60,5        | 29,4       | 55,6        |
| 17    | 8,2                         | 30,7        | 9,9        | 27,2        | 42    | 27,2                        | 61,7        | 30,3       | 56,7        |
| 18    | 8,9                         | 32,0        | 10,7       | 28,4        | 43    | 28,0                        | 62,9        | 31,1       | 57,8        |
| 19    | 9,6                         | 33,3        | 11,5       | 29,6        | 44    | 28,8                        | 64,1        | 32,0       | 58,9        |
| 20    | 10,3                        | 34,6        | 12,2       | 30,8        | 45    | 29,6                        | 65,3        | 32,8       | 60,2        |
| 21    | 11,0                        | 35,9        | 13,0       | 32,0        | 46    | 30,4                        | 66,5        | 33,6       | 61,3        |
| 22    | 11,8                        | 37,2        | 13,8       | 33,2        | 47    | 31,2                        | 67,7        | 34,5       | 62,5        |
| 23    | 12,5                        | 38,4        | 14,6       | 34,4        | 48    | 32,0                        | 68,9        | 35,3       | 63,6        |
| 24    | 13,2                        | 39,7        | 15,4       | 35,6        | 49    | 32,8                        | 70,1        | 36,1       | 64,7        |
| 25    | 14,0                        | 41,0        | 16,2       | 36,8        | 50    | 33,6                        | 71,3        | 37,0       | 65,9        |

Tabel 3.3

Eenzijdig naar boven begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor  $\mu$ .

| $\mu$ | betrouwbaarheidscoëfficiënt |      |      |      |       |       | $\mu$ |
|-------|-----------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|
|       | 0,9                         | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,995 | 0,999 |       |
| 0     | 2,3                         | 3,0  | 3,9  | 4,6  | 5,3   | 6,9   | 0     |
| 1     | 3,9                         | 4,7  | 5,8  | 6,6  | 7,4   | 9,2   | 1     |
| 2     | 5,3                         | 6,3  | 7,5  | 8,4  | 9,3   | 11,2  | 2     |
| 3     | 6,7                         | 7,8  | 9,1  | 10,0 | 11,0  | 13,1  | 3     |
| 4     | 8,0                         | 9,2  | 10,6 | 11,6 | 12,6  | 14,8  | 4     |
| 5     | 9,3                         | 10,5 | 12,0 | 13,1 | 14,2  | 16,5  | 5     |
| 6     | 10,5                        | 11,8 | 13,4 | 14,6 | 15,7  | 18,1  | 6     |
| 7     | 11,8                        | 13,1 | 14,8 | 16,0 | 17,1  | 19,6  | 7     |
| 8     | 13,0                        | 14,4 | 16,2 | 17,4 | 18,6  | 21,2  | 8     |
| 9     | 14,2                        | 15,7 | 17,5 | 18,8 | 20,0  | 22,7  | 9     |
| 10    | 15,4                        | 17,0 | 18,8 | 20,2 | 21,4  | 24,1  | 10    |
| 11    | 16,6                        | 18,2 | 20,1 | 21,5 | 22,8  | 25,6  | 11    |
| 12    | 17,8                        | 19,4 | 21,4 | 22,8 | 24,1  | 27,0  | 12    |
| 13    | 19,0                        | 20,7 | 22,7 | 24,1 | 25,5  | 28,4  | 13    |
| 14    | 20,1                        | 21,9 | 24,0 | 25,5 | 26,8  | 29,9  | 14    |
| 15    | 21,3                        | 23,1 | 25,2 | 26,7 | 28,2  | 31,2  | 15    |
| 16    | 22,5                        | 24,3 | 26,5 | 28,0 | 29,5  | 32,6  | 16    |
| 17    | 23,6                        | 25,5 | 27,8 | 29,3 | 30,8  | 34,0  | 17    |
| 18    | 24,8                        | 26,7 | 29,0 | 30,6 | 32,1  | 35,4  | 18    |
| 19    | 25,9                        | 27,9 | 30,2 | 31,9 | 33,4  | 36,7  | 19    |
| 20    | 27,0                        | 29,1 | 31,5 | 33,1 | 34,7  | 38,0  | 20    |
| 21    | 28,2                        | 30,2 | 32,7 | 34,4 | 36,0  | 39,4  | 21    |
| 22    | 29,3                        | 31,4 | 33,9 | 35,6 | 37,2  | 40,7  | 22    |
| 23    | 30,5                        | 32,6 | 35,1 | 36,8 | 38,5  | 42,0  | 23    |
| 24    | 31,6                        | 33,8 | 36,3 | 38,1 | 39,8  | 43,3  | 24    |
| 25    | 32,7                        | 34,9 | 37,5 | 39,3 | 41,0  | 44,6  | 25    |
| 26    | 33,8                        | 36,1 | 38,7 | 40,5 | 42,3  | 45,9  | 26    |
| 27    | 35,0                        | 37,2 | 39,9 | 41,8 | 43,5  | 47,2  | 27    |
| 28    | 36,1                        | 38,4 | 41,1 | 43,0 | 44,7  | 48,5  | 28    |
| 29    | 37,2                        | 39,5 | 42,3 | 44,2 | 46,0  | 49,8  | 29    |
| 30    | 38,3                        | 40,7 | 43,5 | 45,4 | 47,2  | 51,1  | 30    |
| 31    | 39,4                        | 41,8 | 44,7 | 46,6 | 48,4  | 52,3  | 31    |
| 32    | 40,6                        | 43,0 | 45,8 | 47,8 | 49,7  | 53,6  | 32    |
| 33    | 41,7                        | 44,1 | 47,0 | 49,0 | 50,9  | 54,9  | 33    |
| 34    | 42,8                        | 45,3 | 48,2 | 50,2 | 52,1  | 56,2  | 34    |
| 35    | 43,9                        | 46,4 | 49,4 | 51,4 | 53,3  | 57,4  | 35    |
| 36    | 45,0                        | 47,5 | 50,5 | 52,6 | 54,6  | 58,7  | 36    |
| 37    | 46,1                        | 48,7 | 51,7 | 53,8 | 55,8  | 59,9  | 37    |
| 38    | 47,2                        | 49,8 | 52,9 | 55,0 | 57,0  | 61,2  | 38    |
| 39    | 48,3                        | 50,9 | 54,0 | 56,2 | 58,2  | 62,4  | 39    |
| 40    | 49,4                        | 52,1 | 55,2 | 57,4 | 59,4  | 63,7  | 40    |
| 41    | 50,5                        | 53,2 | 56,4 | 58,5 | 60,6  | 64,9  | 41    |
| 42    | 51,6                        | 54,3 | 57,5 | 59,7 | 61,8  | 66,1  | 42    |
| 43    | 52,7                        | 55,5 | 58,7 | 60,9 | 63,0  | 67,4  | 43    |
| 44    | 53,8                        | 56,6 | 59,8 | 62,1 | 64,2  | 68,6  | 44    |
| 45    | 54,9                        | 57,7 | 61,0 | 63,2 | 65,4  | 69,8  | 45    |
| 46    | 56,0                        | 58,8 | 62,1 | 64,4 | 66,5  | 71,1  | 46    |
| 47    | 57,1                        | 59,9 | 63,3 | 65,6 | 67,7  | 72,3  | 47    |
| 48    | 58,2                        | 61,1 | 64,4 | 66,8 | 68,9  | 73,5  | 48    |
| 49    | 59,3                        | 62,2 | 65,6 | 67,9 | 70,1  | 74,7  | 49    |
| 50    | 60,4                        | 63,3 | 66,7 | 69,1 | 71,3  | 76,0  | 50    |

Voor waarden van  $x > 50$  kan verder met voordeel gebruik gemaakt worden van het feit, dat  $\frac{x - \mu}{\sqrt{\mu}}$  asymptotisch normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie 1.

Voor het praktisch gebruik geven wij hier voor twee drempelwaarden  $\alpha = 0,05$  en  $\alpha = 0,01$  tweezijdige intervallen

$$(3.15) \quad \begin{cases} \alpha = 0,05 & x + 1,92 \pm 1,960 \sqrt{x+1,0} \\ \alpha = 0,01 & x + 3,32 \pm 2,576 \sqrt{x+1,7} \end{cases}$$

Vergelijking met de op exacte wijze verkregen intervallen voor  $x = 50$  doet verder zien, dat deze benaderingsmethode voor  $x \geq 50$  voor de meeste doeleinden zeer bruikbaar is. Er geldt nl.:

Tabel 3.4

Betrouwbaarheidsinterval met behulp van de normale benadering.

| $x = 50$                                          |                 |         |                 |         |
|---------------------------------------------------|-----------------|---------|-----------------|---------|
|                                                   | $\alpha = 0,05$ |         | $\alpha = 0,01$ |         |
|                                                   | $\mu_1$         | $\mu_2$ | $\mu_1$         | $\mu_2$ |
| asymptotisch met behulp van de normale benadering | 37,9            | 65,9    | 34,8            | 71,8    |
| exact                                             | 37,0            | 65,9    | 33,6            | 71,3    |

Al deze methoden zijn in eerste instantie weer gebaseerd op een enkele waarneming. Heeft men  $n$  waarnemingen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) dan bepaalt men weer een betrouwbaarheidsinterval voor  $n\mu$  door middel van  $\sum_{i=1}^n x_i = x$ . Vindt men hiervoor het interval  $(\mu'_1, \mu'_2)$  dan is  $(\frac{\mu'_1}{n}, \frac{\mu'_2}{n}) \equiv (\mu_1, \mu_2)$  weer een betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu$  met dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel.

Aan betrouwbaarheidsintervallen, evenals aan toetsen en schattingen kunnen verschillende eisen gesteld worden. Een belangrijke eigenschap in verband hiermee is o.a., dat voor een gegeven drempelwaarde  $\alpha$ , de gemiddelde lengte van het betrouwbaarheidsinterval zo klein mogelijk is. S.S.WILKS [56] heeft nu aangetoond dat

$$\frac{\left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \mu \right) \sqrt{n}}{\sqrt{\mu}}$$

asymptotisch normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie 1, en verder, dat het betrouwbaarheidsinterval hierop gebaseerd onder een grote klasse van andere betrouwbaarheidsintervallen gemiddeld de kortste lengte bezit. Verdere uitwerking voor het geval  $\alpha = 0,05$  geeft:

$$(3.16) \quad (\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1,92}{n} \pm \sqrt{\frac{1}{n^2} \{3,82 \sum_{i=1}^n x_i + 3,46\}}$$

Vergelijking van (3.16) met (3.15) voor  $\alpha = 0,05$  doet zien, dat deze grenzen in beide gevallen identiek zijn. (3.15) geeft dus eveneens gemiddeld kortste intervallen.

# Appendix.

(1) Een variabele  $x$ , die verschillende waarden kan aannemen met bepaalde kansen, wordt een stochastische grootheid genoemd. De eigenschap van een variabele stochastisch te zijn wordt door onderstreping aangegeven ( $\underline{x}$ ). De waarden, die  $\underline{x}$  kan aannemen, worden weergegeven door  $x$ , zonder onderstreping. Met elke stochastische grootheid correspondeert een zogenaamde verdelingsfunctie  $F(x) = P[\underline{x} \leq x]$ , dit is de kans, dat de stochastische grootheid  $\underline{x}$  hoogstens gelijk is aan  $x$ .

Onder de voortbrengende functie  $G(s)$  van een verdeling verstaan wij een functie, die bij ontwikkeling naar  $s$ , als coëfficiënt van  $s^x$ , de kans geeft, dat de stochastische variabele  $\underline{x}$  gelijk is aan  $x$  ( $P[\underline{x} = x]$ ).

(2)  $\underline{x}$  bezit een Poissonverdeling als

$$P[\underline{x} = x] = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

De verwachting,  $E \underline{x}$ , en de variantie,  $Var \underline{x}$ , zijn op eenvoudige wijze te vinden met behulp van de voortbrengende functie van de verdeling

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^x e^{-\mu} \mu^x}{x!} = e^{-\mu + \mu s}$$

Volgens de theorie der voortbrengende functies geldt:

$$E \underline{x} = G'(1) = \mu$$

$$E \underline{x}^2 = G''(1) + G'(1) = \mu^2 + \mu,$$

dus 
$$Var \underline{x} = E \underline{x}^2 - (E \underline{x})^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

(3) Een grootheid  $\underline{x}$  bezit een binomiale verdeling als geldt

$$P[\underline{x} = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

Voor  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  en  $np \rightarrow \mu$  geldt:

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \rightarrow 0$$

Immers voor de binomiale uitdrukking is te schrijven:

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{(np)^x}{x!} \cdot (1-\frac{p}{n}) \cdot (1-\frac{p}{n}) \cdot \dots \cdot (1-\frac{p}{n}) \cdot (1-\frac{p}{n})^{n-x}$$

Hieruit volgt:



$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ np \rightarrow \mu}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \lim_{np \rightarrow \mu} \frac{(np)^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right).$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np \rightarrow \mu}} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-x} = \\ & = \frac{\mu^x}{x!} \cdot 1 \cdot e^{-\mu} = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \end{aligned}$$

Dit betekent o.a., dat het aantal "successen" onder een aantal onafhankelijke experimenten, bij ieder waarvan de kans op een succes eenzelfde kleine waarde bezit, bij benadering een Poissonverdeling bezit. Van deze eigenschap wordt bij toepassingen vaak gebruik gemaakt.

(4) Een betrouwbaarheidsinterval, berekend op grond van een aantal waarnemingen  $x_1, \dots, x_n$ , voor de onbekende parameter  $\theta$  van een verdeling,  $F(x, \theta)$ , wordt gevormd door al die waarden  $\theta'$  van  $\theta$ , waarbij toetsing van de hypothese  $\theta = \theta'$  niet tot verwerping leidt. De onbetrouwbaarheid van het betrouwbaarheidsinterval is gelijk aan de onbetrouwbaarheid van de daarbij gebruikte toets. Bepalen wij betrouwbaarheidsintervallen met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  op grond van een groot aantal onafhankelijke steekproeven, dan zal bij benadering in een fractie  $(1 - \alpha)$  van de gevallen het interval de werkelijke parameterwaarde bevatten.

(5) De  $\chi^2$ -toets voor aanpassing geeft de kans aan, dat het gevonden waarnemingsmateriaal of onwaarschijnlijker uitkomsten trekkingen zijn uit de als model gekozen verdelingsfuncties. Is deze kans zeer klein, dan wordt aangenomen, dat de keuze van het model niet goed was. De hypothese, dat het waarnemingsmateriaal werd voortgebracht door de beschouwde verdelingsfunctie wordt verworpen (zie [29], p. 273).

(6) Zijn  $x_1, \dots, x_n$  onafhankelijk verdeeld en bezitten zij Poissonverdelingen met parameters  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , dan bezit  $\sum_{i=1}^n x_i$  een Poissonverdeling met parameter  $\sum_{i=1}^n \mu_i$ .

(7) Een lineaire hypothese houdt in, dat er bepaalde lineaire betrekkingen tussen de onbekende parameters bestaan. In de regressieanalyse (waarvan de variantie-analyse een speciaal geval is) zijn deze parameters de regressiecoëfficiënten. In ons geval zijn het de  $\mu_{ij}$ .

(8)  $\lambda$ -toets. De kans op een bepaald waarnemingsresultaat  $x_1, \dots, x_n$  kan worden beschouwd als een functie van de onbekende parameters  $\theta_1, \dots, \theta_k$  van de verdeling, waaruit de  $x_i (i=1, \dots, n)$  komen. De te toetsen hypothese en de toegelaten hypothesen corresponderen met deelruimten van de parameterruimte. De parameter-ruimte is de  $k$ -dimensionale ruimte met coördinaten  $\theta_1, \dots, \theta_k$ . De deelruimte, die met de toegelaten hypothesen correspondeert, wordt aangegeven met  $\Omega$ , die behorende bij de te toetsen hypothese,  $H_0$ , met  $\omega$ . Wij bepalen het maximum van

$$P[\underline{x}_i = x_i \ (i=1, \dots, n) | \theta_1, \dots, \theta_k]$$

als functie van  $\theta_1, \dots, \theta_k$  in  $\omega$  en  $\Omega$ ;  $\lambda$  wordt nu gedefinieerd door:

$$\lambda = \frac{\text{Max. } P[\underline{x}_i = x_i \ (i=1, \dots, n) | \theta_1, \dots, \theta_k]}{\text{Max. } P[\underline{x}_i = x_i \ (i=1, \dots, n) | \theta_1, \dots, \theta_k]}$$

Daar  $\omega \subset \Omega$ , geldt:  $0 \leq \lambda \leq 1$ .  $\lambda$  is nu een functie van de waarnemingen  $x_i (i=1, \dots, n)$  en beschouwen wij deze weer stochastisch, dan is  $\lambda$  dus zelf ook stochastisch. Kleine waarden van  $\lambda$  zijn onder de te toetsen hypothese onwaarschijnlijk. De kritieke zone met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  wordt gevormd door het interval  $0 \leq \lambda \leq \lambda_\alpha$ , waarbij  $P[\lambda \leq \lambda_\alpha | H_0] = \alpha$ .

De verdeling van  $-2 \log \lambda$  is, onder de te toetsen hypothese asymptotisch (voor grote  $n$ ) de  $\chi^2$ -verdeling met  $(k-1)$  vrijheidsgraden, als  $\Omega$   $k$ -dimensionaal en  $\omega$   $r$ -dimensionaal is [29]. In het algemeen bezitten  $\lambda$ -toetsen asymptotisch zekere optimale eigenschappen (zie [31] en [32]).

(9) Laten  $A_1, \dots, A_n$  een aantal elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn, waarvan er zeker één optreedt. Voor een willekeurige andere gebeurtenis  $A$  geldt dan:

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A|A_i] P[A_i]$$

(10) De multinomiale verdeling wordt gegeven door:

$$P[\underline{n}_i = n_i \ (i=1, \dots, k)] = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \prod_{i=1}^k p_i^{n_i},$$

waarbij

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1 \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^k n_i = n$$

Nu geldt dat

$$\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

asymptotisch verdeeld is als  $\chi^2$  met  $(k-1)$  vrijheidsgraden [17]. Zijn alle  $p_i = \frac{1}{k}$ , dan wordt  $np_i = \frac{n}{k}$ , hetgeen bij de door (1.3) gegeven voorwaardelijke verdeling overeenkomt met  $x_{..}$ .

(11) Zijn twee stochastische grootheden onafhankelijk verdeeld als  $\chi^2$  met  $n_1$  respectievelijk  $n_2$  vrijheidsgraden, dan is hun som verdeeld als  $\chi^2$  met  $(n_1 + n_2)$  vrijheidsgraden.

(12) De afleiding van de binomiale dispersie-index wordt gegeven in [37]. De vermelde uitdrukking is een eenvoudige generalisatie. De binomiale dispersie-index wordt gebruikt om in een zgn.  $2 \times k$ -tabel te toetsen of  $k$ -waarnemingen van binomiale verdelingen met verschillende waarden van de parameter  $n$ , éénzelfde waarde van de parameter  $p$  hebben.

(13)  $P[x_i = x_i (i=1, \dots, n); \theta_1, \dots, \theta_k]$  is een functie van  $\theta_1, \dots, \theta_k$  (zie (6)). De meest aannemelijke schattingen  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$  van  $\theta_1, \dots, \theta_k$  zijn die waarden van  $\theta_1, \dots, \theta_k$ , waarvoor deze functie maximaal wordt.

(14) Men wil toetsen of een steekproef  $x_1, \dots, x_n$  uit een verdeling  $F(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$  komt, waarbij de  $\theta_i (i=1, \dots, k)$  onbekend zijn. Een kritieke zone, waarvan de onbetrouwbaarheid onafhankelijk is van de waarden van  $\theta_1, \dots, \theta_k$  is nu een "similar region".

(15) Een toets voor de hypothese  $H_0$  is ten opzichte van de alternatieve hypothese  $H$  meest onderscheidend, wanneer de kans op verwerping van  $H_0$ , wanneer  $H$  geldt, maximaal is in vergelijking met alle andere toetsen van  $H_0$  tegen  $H$  met dezelfde onbetrouwbaarheid. Is een toets voor de hypothese  $H_0$  voor elke alternatieve hypothese  $H$  van een klasse van alternatieve hypothesen meest onderscheidend, dan heet de toets voor deze klasse van alternatieve hypothesen gelijkmatig het meest onderscheidend.

(15a) De ongelijkheid van Tchebycheff geldt voor iedere continue verdelingfunctie  $f(x)$  en luidt:

$$P\{|x - \mu| \leq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

hierin is  $\mu$  de verwachting van  $x$  en  $\sigma^2$  de variantie.

Voor het bewijs zij verwezen naar [29], p. 135.

(16) Een toets is asymptotisch onderscheidend, wanneer, voor de beschouwde collectie alternatieven, het onderscheidingsvermogen 1 tot limiet heeft als de steekproefuitgebreidheid onbegrensd toeneemt.

(17)  $\hat{t}$  is een voldoende schatting van  $\theta$  ("sufficient estimate"), wanneer voor elke andere schatting  $t'$  van  $\theta$  geldt, dat de voorwaardelijke verdeling  $F(\underline{t}' | \underline{t} = t)$  onafhankelijk van  $\theta$  is.

(18)  $\hat{t}$  is een zuivere schatting van  $\theta$  ("unbiased estimate"), als  $E \hat{t} = \theta$ .

(19)  $\hat{t}$  is een meest doeltreffende schatting van  $\theta$  ("efficient estimate") als  $E \hat{t} = \theta$  en, als  $\hat{t}$  onder alle zuivere schattingen de kleinste spreiding heeft.

(20)  $\hat{t}$  is een bruikbare schatting van  $\theta$  ("consistent estimate"), als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{|\hat{t} - \theta| > \delta\} = 0$$

voor iedere  $\delta > 0$ . Hierin stelt  $k$  de uitgebreidheid van de steekproef voor op grond waarvan  $\hat{t}$  berekend wordt.

Literatuurverwijzingen.

(De titels zijn vermeld in de volgorde, waarin zij in de tekst voorkomen.)

1. Bij de inleiding.

- [1] Feller, W., Introduction to probability theory and its applications, Wiley & Sons, N.Y., 1950.
- [2] Feller, W., On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications, Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1949, p. 403.

2. Bij hoofdstuk 1.

a. Literatuur over de Poisson-verdeling.

- [3] Sukhatme, P.V., The problem of samples for the Poisson population, Proceedings of the National Institute of Sciences of India, 3 (1937), p. 297-305.
- [4] Fisher, R.A., Contributions to mathematical statistics, Wiley & Sons, N.Y., 1950.
- [5] Kolodziejczyk, S., La vérification de l'hypothèse sur la constance des probabilités, Annales de la Société Polonaise Mathématique, 9 (1930), p. 60-71.
- [6] Fisher, R.A., The significance of deviation from expectations in a Poisson series, Biometrics, 6 (1950), p. 17-24.
- [7] Hoel, P.G., Testing for the homogeneity of Poisson frequencies, Annals of Mathematical Statistics, 16 (1945), p. 362-368.
- [8] Tables of the binomial probability distribution ( $n = 0-50$ ), Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 6 (1950).
- [9] Romig, H.G., 50-100 Binomial tables, Wiley & Sons, N.Y., 1947.
- [10] Molina, E.C., Poisson's exponential limit, D. van Nostrand Co., New York, 1945.
- [11] Hartley, H.O., and Pearson, E.S., Tables of the  $\chi^2$ -integral and of the cumulative Poisson distribution, Biometrika, 42 (1950), p. 313-326.
- [12] Dodge, H.F. and Romig, H.G., Sampling inspection tables, Wiley & Sons, N.Y., 1944, p. 44.

- [13] Hoel, P.G., On indices of dispersion, *Annals of Mathematical Statistics*, 14 (1943), p. 155-162.
- [14] Kathirganratamby, N., Note on the Poisson index of dispersion, *Biometrika*, 40 (1953), p. 225-228.
- [15] Lancaster, H.O., Statistical control of counting experiments, *Biometrika*, 39 (1952), p. 419.
- [16] Cochran, W.G., The  $\chi^2$ -distribution for the binomial and Poisson series, with small expectations, *Annals of Eugenics*, 7 (1936), p. 207.
- [17] Neyman, J., and Pearson, E.S., Further notes on the  $\chi^2$ -distribution, *Biometrika*, 22 (1931), p. 298.
- [18] Shanawany, M.R. el, An illustration of the accuracy of the  $\chi^2$  approximation, *Biometrika*, 28 (1936), p. 179.
- [19] Przyborowski, J., and Wilensky, H., Homogeneity of results in testing samples from Poisson series, *Biometrika*, 31 (1939), p. 313.
- [19a] Klerk-Grobbe, G., Toets voor de gelijkheid van twee kleine kansen met behulp van even grote steekproeven en het onderscheidingsvermogen van deze toets, Rapport S 131, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1954.
- [20] Sukhatme, P.V., On the distribution of  $\chi^2$  in samples of the Poisson series, *Supplement of the Journal of the Royal Statistical Society*, 5 (1938), p. 75.
- [21] Thomas, M., Some tests for randomness in plant population, *Biometrika*, 43 (1951), p. 102-111.
- [22] Welch, B.L., On tests for homogeneity, *Biometrika*, 30 (1938), p. 149-159.
- [23] Mises, R. von, Ueber Aufteilungs- und Besetzungswahrscheinlichkeiten, *Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul*, N.S., 4 (1939), p. 1-19.
- [24] Geiringer, H., On the probability theory of arbitrarily linked events, *Annals of Mathematical Statistics*, 9 (1938), p. 260-272.
- [25] Fisher, R.A., Thomson, H.G., and Mackenzie, W.A., The accuracy of the plating method of estimating the density of bacterial populations (with particular reference to the use of Thomson's agar medium with soil samples), *Annals of Applied Biology*, 9 (1922), p. 325-359.

- [26] Pearson, E.S., Note on Professor Haldam's paper regarding the treatment of rare events, *Biometrika*, 35 (1948), p. 297-303.
- [27] Klinken, J. van, Enkele toetsen voor de hypothese, dat een groep waarnemingen één steekproef uit een Poisson-verdeling is, Memorandum M 29, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1952.
- [28] Klinken, J. van, Toets voor ~~k~~ steekproeven uit Poisson-verdelingen, Memorandum M 30, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1952.

b. Literatuur over algemene statistische theorie.

- [29] Mood, A.M., Introduction to the theory of statistics, Mc Graw-Hill, 1950.
- [30] Hemelrijk, J., Het combineren van onafhankelijke toetsen, Memorandum M 17a, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1950.
- [31] Neyman, J., First course in probability and statistics, Henry Holt & Cy, N.Y., 1950.
- [32] Wald, A., Tests of statistical hypothesis concerning several parameters, when the number of observations is large, American Mathematical Society Transactions, 54 (1943), p. 426.

3. Bij hoofdstuk 2.

- [33] Berkson, J., A note on the  $\chi^2$ -test, the Poisson and the binomial, J.A.S.A., 35 (1940), p. 362-367.
- [34] Bateman, G.J., The power of the  $\chi^2$ -index of dispersion test, when Neyman's contagious distribution is the alternate hypothesis, *Biometrika*, 37 (1950), p. 59-63.
- [35] Thomas, M., Some tests for randomness, *Biometrika*, 38 (1951), p. 102-111.
- [36] Hoel, P.G., Introduction to mathematical statistics, Wiley & Sons, N.Y., 1947.
- [37] Hoel, P.G., Discriminating between binomial distributions, *Annals of Mathematical Statistics*, 18 (1947), p. 556-564.
- [38] Neyman, J., On a new class of contagious distributions applicable in entomology and bacteriology, *Annals of Mathematical Statistics*, 10 (1939), p. 35-37.
- [39] A.G.Arbus, Kerrich, J.E., Accident statistics and the concept of accident proneness, *Biometrics*, 7 (1951), p. 340-432.

- [39a] Greenwood, M., and Yule, G.U., An inquiry into the nature of frequency distribution representative of multiple happenings, with particular reference to the occurrence of repeated accidents, *Journal of the Royal Statistical Society*, 38 (1920), p. 255-279.
- [40] Bricas, M.A., Le système de courbes de Pearson et le schéma d'urne de Polya, Athènes, 1949.
- [41] Lundberg, O., On random processes and their applications to sickness and accident statistics, Stockholm, 1940.
- [42] Eggenberger, F., und Polya, G., Ueber die Statistik verketteln Vorgänge, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1 (1923), p. 279-289.
- [43] Eggenberger, F., Die Wahrscheinlichkeitsansteckung, *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*.
- [44] Anscombe, F.J., Sampling theory of the negative binomial and logarithmic series distributions, *Biometrika*, 37 (1950), p. 358-382.
- [45] Fisher, R.A., The negative binomial distribution, *Annals of Eugenics*, 11 (1940), p. 182.
- [46] Preston, F.W., The commonness and rarity of species, *Ecology*, 29 (1948), p. 254-283.
- [47] Grundy, P.M., The expected frequencies in a sample of an animal population in which the abundances of species are log. normally distributed, *Biometrika*, 38 (1951), p. 427-434.
- [48] Feller, W., On a general class of contagious distributions, *Annals of Mathematical Statistics*, 14 (1943), p. 389-400.
- [49] Cernuschi, F., and Castagnetto, L., Probability schemes with contagion in space and time, *Annals of Mathematical Statistics*, 18 (1947), p. 122-127.
- [50] Thomas, M., A generalization of Poisson's binomial limit for use in ecology, *Biometrika*, 36 (1949), p. 18.
- [51] Satterthwaite, Generalized Poisson distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, 13 (1942), p. 410-417.

#### 4. Bij hoofdstuk 3.

- [52] Wilks, S.S., *Mathematical Statistics*, Hoofdstuk 6, Princeton University Press, Princeton, 1946.



- [53] Sankara Pillai, K., A note on the Poisson distribution, Proceedings of the Indian Academy of Sciences, 18, (1943), p. 179-190.
- [54] Ricker, W.E., The concept of confidence or fiducial limits applied to the Poisson frequency distribution, Journal of the American Statistical Association, 32 (1937), p. 349-357.
- [55] Przyborowski, J., and Wilenski, H., Statistical principles of routine work in testing clover seed for dodder, Biometrika, 27 (1935), p. 273-293.
- [56] Wilks, S.S., Shortest average confidence intervals from large samples, Annals of Mathematical Statistics, 9 (1938), p. 166-175.

## INHOUD

pag.

### Inleiding

- 0.1. Het Poisson-model -- Voorbeelden van toepassingen 1
- 0.2. De inhoud van dit rapport -- Notatie 11

### Hoofdstuk 1

Het toetsen van enkele hypothesen betreffende de parameters van verschillende Poisson-verdelingen

- 1.1. Toetsen met behulp van de dispersie-index 13
- 1.2. Generalisatie 19
- 1.3. Asymptotische aequivalentie van de voorgaande toetsingsmethoden en de overeenkomstige  $\lambda$ -toetsingsmethoden 24
- 1.4. Exacte toetsen voor zeer kleine waarden van  $\mu$  27
- 1.5. De nauwkeurigheid van de  $\chi^2$ -benadering voor de verdeling van de dispersie-index  $Z_{n,1}$  33
- 1.6. Een asymptotische toetsingsmethode, die berust op het aantal nullen onder de waarnemingen 36

### Hoofdstuk 2

Toetsingsproblemen met speciale typen van verdelingsfuncties als alternatieve hypothesen

- 2.1. Inleiding 38
- 2.2. Het onderscheidingsvermogen van de dispersie-index-toetsen  $T$  voor de alternatieven: discrete verdelingen met quotiënt van variantie en gemiddelde  $> 1$  of  $< 1$ . In het bijzonder: de binomiale verdeling als alternatief 41
- 2.3. De samengestelde Poisson-verdeling met twee parameters; het type A van NEYMAN als alternatieve verdeling 47
- 2.4. Enkele belangrijke discrete verdelingen als bijzondere gevallen van de samengestelde Poissonverdeling 51

### Hoofdstuk 3

Schattingen en betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter van een Poisson-verdeling

- 3.1. Schattingen voor de parameter  $\mu$  van een Poisson-verdeling 57
- 3.2. Betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter  $\mu$  van de Poisson-verdeling 60

### Appendix

67

### Literatuurlijst

72

## ERRATA

Rapport S 133 (Ov 3)

### Overzicht van toetsings- en schattingsmethoden met betrekking tot Poisson-verdelingen

- pagina 2: 5e regel: 'waarbij aantallen' wordt 'waarbij alle aantallen'.  
1e alinea: laatste zin: 'Er bestaan...' vervalt.
- pagina 3: 11e regel: 'vermeld' wordt 'vervuld'.  
2e regel v.o.: 'vierkantjes' wordt 'vierkantje'.
- pagina 5: 1e regel: 'een stuk' wordt 'zeer'.  
punt 4  
5e regel v.o.: 'onderstellen nu' wordt 'onderstellen het gemiddelde nu'.
- pagina 10: 1e alinea: tweede deel 1e zin: ', omdat...' vervalt.  
2e alinea, 1e regel: 'heel' vervalt.  
punt 4: vervang 'sequent' door 'segment' (5 maal).  
punt 4, 7e regel: 'bepaald' vervalt.
- pagina 11: punt 6, 6e regel v.o.: 'van een aankomst' wordt 'van aankomst'.
- pagina 14: '2"-ant' wordt  $2^n$ -ant (2 maal).
- pagina 22: 13e regel v.o.: ' $\lambda$ ' wordt ' $\lambda.k$ '.
- pagina 23: 2e regel: vanaf 'of, wat...' vervalt tot einde van de zin.
- pagina 25: formule (1.15):  $v_{ij}$  wordt  $\hat{v}_{ij}$ .
- pagina 27: 17e regel v.o.: 'experieement' wordt 'experiment'.  
3e en 4e regel v.o.: 'waarde' wordt 'waarden'.
- pagina 35 en 36: alle  $X_i$  worden  $X$  (12 maal).
- pagina 35: 4e regel: 'PERYBOROWSKI' wordt 'PRZYBOROWSKI'.
- pagina 48: 10e regel v.o.:  $34$  wordt  $[34]$ .
- pagina 57: 20e regel v.o.:  $[14]$  wordt  $(14)$ .
- pagina 58: 12e regel: 'als functie van' wordt 'als functie van  $\mu$ '.